انتگرال

مساحت به منزلهٔ حد

برای محاسبهٔ مساحت شکلهای مسطح، مساحت مربعی را که ضلعهایش دارای طول واحدند، واحد مساحت می‌گیریم. اگر واحد طول اینچ باشد، واحد متناظر برای مساحت اینچ مربع خواهد بود، یعنی مساحت مربعی که طول ضلعهایش یک اینچ است. براساس این تعریف، محاسبه مساحت مستطیل بسیار ساده است. اگر p و q طولهای دو ضلع مجاور مستطیل برحسب واحد طول باشند، مساحت مستطیل برابر با pq واحد مربع است، یا به اختصار، مساحت برابر حاصلضرب pq است. این موضوع برای هر جفت دلخواه p و q از اعداد، خواه گویا باشند یا نباشند، صادق است. برای p و q ی گویا این نتیجه را با قرار دادن $p = m/n \ , \ q = m'/n'$ به دست می‌آوریم که در آن m، n ، m' و n' عددهایی صحیحند. پس قدر مشترک $1/N = 1/nn'$ را برای دو ضلع مستطیل به دست می‌آوریم. بنابراین $p = mn' \times 1/N \ , \ q = nm' \times 1/N$. و بالاخره، مستطیل را به مربعهای کوچکی به ضلع $1/N$ و مساحت $1/N^2$ تقسیم می‌کنیم. تعداد چنین مربعهایی برابر است با $nm' \times mn'$ و مساحت کل آنها برابر است با $nm'mn' \times 1/N^2 = nm'mn'/n^2n'^2 = m/n \times m'/n' = pq$. اگر p و q گنگ باشند، همین نتیجه به این طریق حاصل می‌شود که نخست به جای p و q به ترتیب عددهای گویای تقریبی p_r و q_r را قرار می‌دهیم و سپس می‌گذاریم $p_r \ , \ q_r$ به p و q میل کنند.

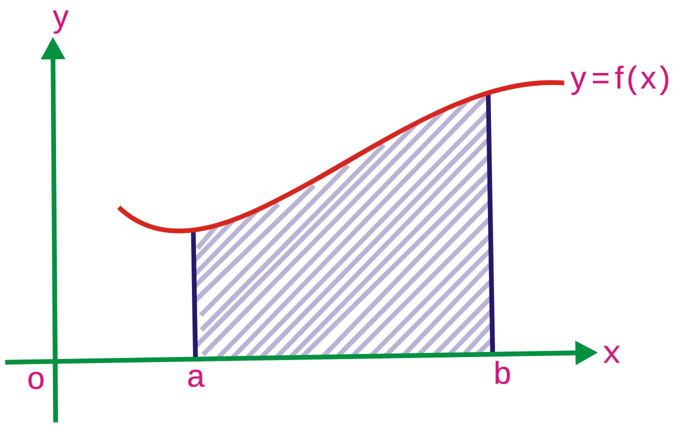
از لحاظ هندسی روشن است که مساحت هر مثلث برابر است با نصف مساحت مستطیلی با همان قاعدهٔ b و ارتفاع h؛ پس مساحت مثلث با عبارت آشنای $\frac{1}{2}bh$ معین می‌شود. هر ناحیه در صفحه که محدود به یک یا چند خط شکسته باشد قابل تجزیه به مثلثهاست؛ پس مساحت آن برابر مجموع مساحتهای این مثلثهاست.

نیاز به روش کلی‌تری برای محاسبه مساحتها وقتی پیش می‌آید که بخواهیم مساحت شکلی را کـه نـه بـه خطهای شکسته بلکه به خمها محدود است تعیین کنیم. مثلاً چگونه می‌توان مساحت قرصی مستدیر یـا مـساحت [ناحیه‌ای محدود به] بخشی از یک سهمی را تعیین کرد؟ این مسئله بسیار اساسی را، که در قلب حـساب انتگـرال جای دارد، ارشمیدس در قرن سوم پیش از میلاد بررسی کرد؛ وی مساحت چنین ناحیـه‌هـایی را بـه روش «افنـا» محاسبه می‌کرد. به نظر ارشمیدس و سایر ریاضیدانان بزرگ تا زمان گاوس، می‌توان این رویکرد «ساده و طبیعی» را در پیش گرفت که به طور شهودی، نواحی محدود به مرزهای خمیده مساحتی دارند و مسئله ما تعریف آنها نیست بلکه محاسبه آنهاست. در ناحیهٔ مورد نظر، ناحیه‌ای تقریبی را که مرزش یک چند ضلعی و مساحتش خوش تعریف است محاط می‌کنیم. سپس با انتخاب چند ضلعی دیگری واقع در ناحیهٔ قبلی که چند ضلعی اولیه در درون آن قرار گیرد، تقریب بهتری برای ناحیهٔ مفروض به دست می‌آوریم. اگر کار را به همین نحو ادامه دهیم، به تدریج تقریبها به کل ناحیه میل می‌کنند و مساحت ناحیهٔ مفروض به صورت حد مساحات دنباله‌ای از نواحی محاطی بـا مـرز چنـد ضلعی که به طرز مناسبی انتخاب شده باشند به دست می‌آید. مساحت دایره‌ای به شعاع ۱ را می‌توان به این طریق محاسبه کرد؛ مقدار عددیش با نماد π نشان داده می‌شود.

ارشمیدس این طرح کلی را در مورد دایره و در مورد قطعهٔ سهموی به کار برد. در خلال قرن هفدهم نیز در موارد متعدد دیگری با موفقیت به کار رفت. در هر مورد، محاسبهٔ عملی حد به روش مبتکرانه‌ای که اختصاص به آن مسئلهٔ خاص داشت، وابسته می‌شد. یکی از دستاوردهای مهم حساب دیفرانسیل و انتگرال این بود که روشی کلی و نیرومند جای این روشهای خاص و محدود را در محاسبه مساحت گرفت.

انتگرال

نخستین مفهوم بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال، مفهوم انتگرال است. در این بخش انتگرال را به صورت مساحت ناحیهٔ زیر یک خم به وسیلهٔ یک حد بیان می‌کنیم. اگر تـابع پیوسـتهٔ مثبتـی چـون $y=f(x)$، مـثلاً $y=x^2$ یا $y=1+cosx$ داده شده باشد، آنگاه ناحیه‌ای را که از پایین به قطعه‌ای از محور x بین مختص a و مختص بزرگتر b و از دو طرف به خطهای عمود بر این محور در این نقاط و از بالا بـه خـم $y=f(x)$ محـدود است در نظر می‌گیریم. هدف ما محاسبهٔ مساحت این ناحیه، A، است.



انتگرال به منزله مساحت

چون چنین ناحیه‌ای را در حالت کلی نمی‌توان به چند مستطیل یا مثلث تجزیه کرد، فرمول بلا واسـطه‌ای برای محاسبه صریح مساحت A در دست نیست. اما می‌توانیم به صورت زیر، مقداری تقریبی برای A پیدا کنـیم و سپس A را به شکل یک حد نشان دهیم: بازهٔ از $x=a$ تا $x=b$ را بـه چنـد زیـر بـازه کوچـک تقسـیم مـی‌کنـیم، عمودهایی بر محور x در نقاط تقسیم رسم می‌کنیم و به جای هر نوار از ناحیهٔ زیر خم، مستطیلی قرار می‌دهیم که ارتفاع آن بین بیشترین و کمترین ارتفاع خم در آن نوار انتخاب شده است. مجموع مساحتهای این مـستطیلها، S ،

مقداری تقریبی برای A یعنی مساحت واقعی ناحیهٔ زیر خم به دست می‌دهد. هر چه تعداد مستطیلها بیشتر و عرض هر مستطیل کمتر شود، دقت این تقریب بیشتر می‌شود.

پس می‌توانیم مساحت دقیق را به صورت یک حد تعریف کنیم: اگر دنباله‌ای چون

$$S_1 , S_2 , S_3 , \ldots \qquad (۱)$$

از تقریبهای مستطیلی مساحت زیر خم تشکیل دهیم به قسمی که عرض عریضترین مستطیل S_n وقتی n به سمت بی‌نهایت می‌رود به صفر میل کند، آنگاه دنبالهٔ (۱) به حد A میل می‌کند

$$S_n \to A \qquad (۲)$$

و این حد A که مساحت زیر خم است، مستقل از نحوهٔ انتخاب دنبالهٔ (۱) است به شرط اینکه عرضهای مستطیلهای تقریب زننده به صفر بگرایند. (مثلاً S_n می‌تواند از S_{n-1}، با افزودن یک یا چند نقطهٔ جدید تقسیم به نقاط تقسیم معرف S_{n-1}، به دست آید یا آنکه انتخاب نقطه‌های تقسیم برای S_n کاملاً مستقل از انتخاب این نقطه‌ها برای S_{n-1} باشد.) مساحت ناحیه، A، را که با این فرایند حدی بیان می‌شود، بنا به تعریف، انتگرال تابع $f(x)$ از a تا b می‌نامیم و آن را با استفاده از نماد خاصی موسوم به «نماد انتگرال» به صورت زیر می‌نویسیم

$$A = \int_a^b f(x)dx \qquad (۳)$$

نماد $\int$، «dx»، و نام «انتگرال» را لایب‌نیتز برای نشان دادن روش به دست آمدن این حد ابداع کرد. برای توضیح این نمادگذاری، فرایند نزدیک شدن به مساحت A را به تفصیل شرح می‌دهیم. در این ضمن، صورتبندی تحلیلی فرایند حدی به ما امکان خواهد داد که از فرضهای محدود کنندهٔ $f(x) \geq 0$ و $b > a$ دست بکشیم و بالاخره، مفهوم شهودی قبلی مساحت به منزلهٔ مبنای تعریفمان از انتگرال را کنار بگذاریم.

بازهٔ از a تا b را به n زیربازهٔ کوچک که، فقط برای سادگی، فرض می‌کنیم طول همه برابر با $(b-a)/n$ باشد، تقسیم می‌کنیم. نقاط تقسیم را به صورت

$$x_\circ = a \quad , \quad x_1 = a + \frac{b-a}{n}$$

$$x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n}, \quad \cdots \quad , x_n = a + \frac{n(b-a)}{n} = b$$

نشان می‌دهیم. کمیت $(b-a)/n$، تفاضل بین مقادیر متوالی x، را با Δx نشان می‌دهیم (که خوانده می‌شود «دلتا ایکس»):

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_{j+1} - x_j$$

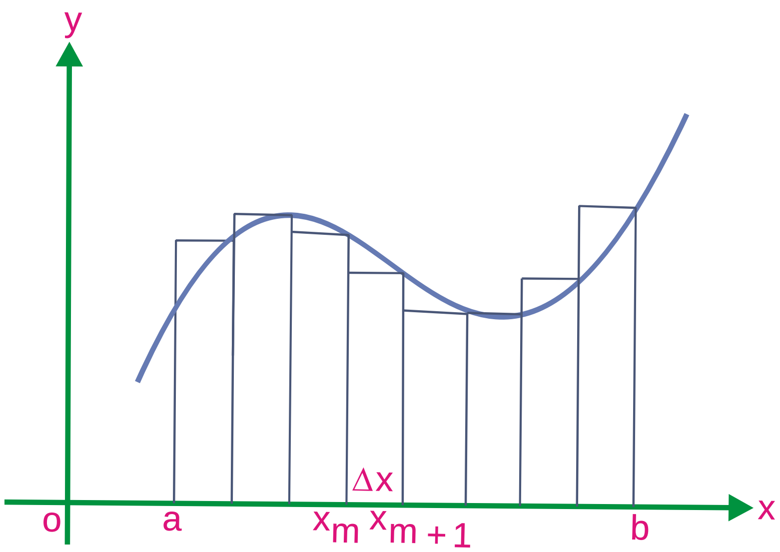
که در آن نماد Δ فقط به معنی « تفاضل» است (این نماد نشان‌دهنده یک « عملگر» است و نباید آن را با عدد اشتباه کرد.) می‌توانیم ارتفاع هر مستطیل تقریب زننده را مقدار $y = f(x)$ در نقطهٔ انتهایی سمت راست زیربازه بگیریم. در این صورت مجموع مساحتهای این مستطیلها چنین خواهد بود

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \qquad (۴)$$

یا به اختصار

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\,\Delta x \qquad (۵)$$

در اینجا نماد $\sum_{j=1}^{n}$ (که خوانده می‌شود « سیگما از j مساوی ۱ تا n») به معنی مجموع همهٔ عبارتهایی است که وقتی j مقدارهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، ... ، n را به نوبت اختیار می‌کند، به دست می‌آیند.



تقریب زدن مساحت با مستطیلهای کوچک

در مثالهای زیر، استفاده از نماد سیگما برای بیان فشرده نتیجه عمل مجموع‌یابی نشان داده می‌شود

$$2+3+4+\cdots+10=\sum_{j=2}^{10} j$$

$$1+2+3+\cdots+n=\sum_{j=1}^{n} j$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{j=1}^{n} j^2$$

$$aq+aq^2+\cdots+aq^n=\sum_{j=1}^{n} aq^j$$

$$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+nd)=\sum_{j=0}^{n} (a+jd)$$

اکنون دنباله‌ای از این گونه تقریبهای S_n تشکیل می‌دهیم که در آن n به طور نامتناهی افزایش می‌یابد، یعنی تعداد جمله‌های هر مجموع (۵) افزایش می‌یابند در حالی که مقدار هر جملهٔ $f(x_j)\Delta x$ به خـاطر عامـل

$\Delta x = (b-a)/n$ به صفر میل می‌کند. وقتی n به سمت بی‌نهایت می‌رود، ایـن مجمـوع بـه مـساحت A میـل می‌کند

$$A = lim \sum_{j=1}^{n} f\left(x_j\right)\Delta x = \int_a^b f\left(x\right)dx \qquad (۶)$$

لایب‌نیتز این گذار از مجموع تقریب زنندهٔ S_n به حد A را با قرار دادن $\int$ به جای نماد مجموع‌یابی Σ و نماد d به جای نماد تفاضلی Δ به صورت نمادین در آورد. (نماد مجموع‌یابی Σ در زمـان لایـب‌نیتـز معمـولاً بـه صورت S نوشته می‌شد و نماد $\int$ نیز صورتی از S است.) هر چند شیوهٔ نمادگذاری لایب‌نیتز نحوهٔ به دست آمـدن انتگرال به صورت حد یک مجموع متناهی را به خوبی می‌نمایاند، باید مراقب باشیم برای چیزی که به هر حال یک قرارداد صرف برای نحوهٔ نشان دادن حد است، اهمیت خیلی زیادی قائل نشویم. در اوائل پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال که مفهوم حد به روشنی درک نمی‌شد و همواره در ذهن نمی‌ماند، معنی انتگرال را چنین توضیح می‌دادند که «به جای تفاضل متناهی Δx، کمیت بی‌نهایت کوچک dx قرار می‌گیرد و خود انتگرال مجموع بی‌نهایت کمیت بی‌نهایت کوچک $f\left(x\right)dx$ است». مفهوم بی‌نهایت کوچک هرچند جاذبه‌ای برای اشخاص خیال‌پـرداز دارد، در ریاضیات نوین جایگاهی ندارد. اینکه مفهوم روشن انتگرال را گردوغباری از عبارتهای فاقد معنی بپوشاند، بـه هـیچ هدف مفیدی یاری نمی‌رساند.

ولی حتی لایب‌نیتز گاهی با ملاحظهٔ قدرت الهامبخشی نمادهایش عنان اختیار خود را از کف مـی‌داد؛ ایـن نمادها چنان هستند که گویی نشان‌دهندهٔ مجموع کمیتهایی « بی‌نهایت کوچک» هستند که می‌توانیم بـا آنهـا تـا حدودی همچون کمیتهای معمولی رفتار کنیم. در واقع کلمهٔ انتگرال برای بیان ایـن موضـوع وضـع شـد کـه کـل مساحت A مرکب از اجزای « بی‌نهایت کوچک» $f\left(x\right)dx$ است. در هر حال، تقریبـاً صدسـال پـس از نیـوتن و لایب‌نیتز بود که به وضوح تشخیص داده شد که پایهٔ واقعی تعریف انتگرال، مفهوم حد است و نه چیز دیگر.