

تا بحال قطعاً منظور از کمیت را فهمیده‌اید. بعد یک کمیت یعنی همان جنس آن. مثلاً بعد ارتفاع پایه میز طول است همان طور که مقدار فاصله تهران - مشهد هم از جنس طول است. با آنکه ارتفاع پایه میز با فاصله تهران - مشهد ربطی به هم ندارند. در اصل هر گاه دو کمیت هم بعد هستند که بتوان آنها را با یک نوع واحد اندازه‌گیری کرد. مثلاً مقدار جرم یک سیب را نمی‌توان با سانتی‌متر سنجید در حالی که طول کاغذ را می‌شود پس طول کاغذ با جرم سیب قطعاً هم بعد نخواهند بود.

بعدهای گوناگون (یعنی جنس‌های کمیتها) را همان طور که در بخش قبلی گفته شد می‌توان بر حسب بعدهای اصلی نوشت. سرعت از جنس طول بر زمان است. نیرو از جنس جرم در طول بر زمان به توان 2. در بررسی بعدها دیگر ما به واحدها اشاره نمی‌کنیم بلکه همه چیز را بر حسب جنس بعدشان می‌نویسیم. نماد متعارف بعد [ ] براکت است.

$$[F] = \frac{ML}{T^2} = MLT^{-2}$$

مرسوم است که بعد طول را با  $L$ ، بعد جرم را با  $M$  و بعد زمان را با  $T$  نمایش می‌دهند. همچنین در مورد کمیات اصلی دیگر بعد جریان را با  $A$  نشان می‌دهند.

$$[V] = \frac{L}{T} = LT^{-1} \quad ; \quad [a] = LT^{-2}$$

جالب است که همه ابعاد مختلف از حاصل ضرب توان‌های بعد کمیات اصلی حاصل می‌شوند.

$$[X] = L^a M^b T^g A^n \dots$$

اما چرا؟ توضیحش سخت است شاید چیزی شبیه یک قرارداد حتی باشد ما معمولاً چیزهای پیچیده‌تر را بدون بعد در نظر می‌گیریم ولی می‌توان استدلال ساده‌ای بیان کرد که حاصل از شیوه

اندازه‌گیری است. فرض کنید  $[X] = f(Y_1, \dots, Y_i)$  که  $Y_i$  ها کمیات اصلی‌اند که در سیستم دستگاهی

خاص اندازه‌گیری شده‌اند. پس 1 واحد  $X$  می‌شود  $f(1y_1, 1y_2, \dots)$  این را به فرم مقابل می‌نویسم.

$$1_x = f(1y_1, 1y_2, 1y_3, \dots)$$

حال اگر به سیستمی برویم که در آنها واحد کمیات اصلی  $1y'_1, 1y'_2, 1y'_3$  و ... باشد در آنجا قطعاً

$1_{x'}$  چیزی غیر از  $1_x$  خواهد بود. می‌دانم که با تغییر سیستم صرفاً ضرایبی که ضریب تبدیل واحدها

هستند وارد مسأله می‌شوند.

یعنی هر واحد  $1_{y_i}$  را بر حسب واحد  $1_{y'_i}$  اندازه‌گیری می‌توان کرد:

$$1_{y_i} = \alpha_i 1_{y'_i}$$

پس در کل خواهیم داشت:

$$1_x = f(1_{y_i})$$

$$1_{x'} = f(1_{y'_i})$$

---

$$1_x = f(a_i 1_{y'_i})$$

باید بتوان  $1_x$  را نیز بر حسب  $1_{x'}$  اندازه‌گیری کرد پس:

$$1_x = b 1_{x'} \Rightarrow f(a_i 1_{y'_i}) = b f(1_{y'_i})$$

پس  $f$  حتماً باید تابعی باشد که خاصیت بالا را داشته باشد. اما چه توابعی چنین خواصی را دارند؟

برای حالت ساده‌تر چه تابع‌هایی  $b f(x) = f(ax)$  که  $a, b$  از  $x$  مستقل‌اند و  $a, b$  به هم

وابسته. به تعبیر دیگر  $f(ax) = b(a)f(x)$

می توان نشان داد که تنها توابع توانی  $f(x) = x^r$  این خاصیت را دارا هستند. پس بعلت اصولی

که برای اندازه گیری داشتیم قطعاً  $f(x_i) = P x_i^{a_i}$  خواهد بود.

خوب این چه نفعی می تواند داشته باشد؟ آیا این به این معناست که کلاً همواره کمیات فیزیک به

طور توانی به هم مربوط می شوند و حالت دیگری وجود ندارد یعنی  $q_3 = q_1^{n_1} q_2^{n_2}$  و نمی شود که

$$q_3 = \sin(q_1 q_2)$$

نه این به این معنا نیست. تمام مباحث قبل در مورد اندازه گیری و واحدهای اندازه گیری بود نه

کمیات مورد اندازه گیری.

در مورد  $q_3 = 1 \sin q_1 q_2$  در اصل جنس  $q_3$  در 1 مقابل  $\sin$  قرار دارد. یعنی این 1 در یک

دستگاه یک است در دستگاه دیگری عدد دیگری می شود. یعنی بهتر بود ننویسیم  $q_3 = a \sin q_1 q_2$

که  $[q_3] = [a]$  و خود  $a$  تابع مقادیر  $q_1$  و  $q_2$  نیست. با خاطر قضیه ای که گفتیم همواره بعد آرگومان

توابع غیر از حالت خاص توابع  $x^r$  یک است. بعد یک یعنی چیزی که جنس خاص فیزیکی (مادی) ندارد

و صرفاً موجود مجرد است. مثلاً عدد محض  $\pi$  یا زاویه و یا آرگومان  $\sin$  و توابع دیگر.

$$[\pi] = 1$$

$[\theta] = 1$  : زاویه بین دو راستا

که  $\Sigma x$  در مسأله ظاهر می شود  $[x] = 1$

$$[f(ax)] = 1, \quad [ax] = 1 \quad \text{اگر } f \neq ()^r$$

از جمله فواید قضیه قبل آن است که می توان واحدهای فرعی دستگاه مختلف را صرفاً با دانستن

نسبت واحدهای اصلی دو دستگاه به هم تبدیل کرد.

مثال. کمیتی  $1 \frac{g}{in^2 \text{ } ^\circ C}$  است این کمیت چند  $\frac{kg}{m^2 \text{ } ^\circ C}$  خواهد بود؟

حل. هر  $g$  ،  $0/001 kg$  است و هر  $1 in = 2/54 mm$

$$\Rightarrow 1 \frac{g}{in^2 \text{ } ^\circ C} = \frac{0/001kg}{(0/00254m)^2 \text{ } ^\circ C} = 155/00031 \frac{kg}{m^2 \text{ } ^\circ C}$$

از جمله دیگر بررسی ابعاد تشخیص و یا بهتر بگوییم حدس روابط بین کمیات مختلف در مسأله

است.

مثال. می دانیم سرعت امواج مکانیکی در یک تار سیمی با چگالی جرم خطی سیم و مقدار نیروی

کشش آن رابطه دارد. ساده ترین حدستان برای این رابطه چیست؟

حل. بعد چگالی جرم خطی  $\frac{M}{L}$  است و بعد کشش که نیروست  $\frac{ML}{T^2}$  خواهد بود. بعد سرعت  $\frac{L}{T}$

است. حال باید دید این سه بعد چگونه بهم ربط می یابند.

$$\frac{L}{T} = \left(\frac{M}{L}\right)^g \left(\frac{ML}{T^2}\right)^b \Rightarrow M^{g+b} = 1 \Rightarrow L^{b-g} = L^1$$

$$T^{-2b} = T^{-1} \Rightarrow b = +\frac{1}{2}, \quad g = -\frac{1}{2}$$

که  $F$  کشش و  $\lambda$  چگالی جرم خطی است:

$$\Rightarrow V_{\text{سرعت}} = \sqrt{\frac{F}{\lambda}}$$

