بردارها در فضای سه بعدی:

فضای واقعی فیزیکی ما، فضای مکانی سه بعدی است. در این فضا بیان بـردار بعنـوان پـاره‌خـط جهت‌دار نیازمند تعمیم موارد دو بعدی است. در اکثر موارد تعاریف و قـضایای دو بعـدی را بـه سـادگی می‌توان به فضای سه بعدی تعمیم داد.

3-4-1 : بردار مکان:

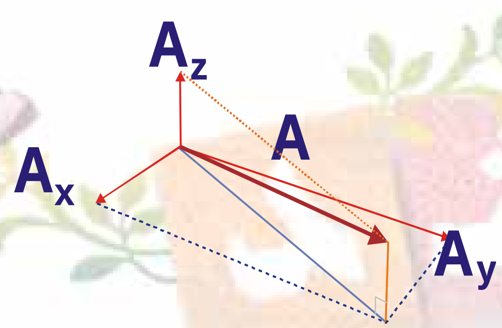
بیان کارتزین بردار مکان سه بعدی شامل طول، عرض، ارتفاع (یا عمق) نقطه مورد نظر نسبت بـه راستاهای مرجع بیان می‌شود. یعنی: $\vec{r} \equiv (x, y, z)$

در مورد هر بردار دیگر هم داریم: $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$

که هر کدام مؤلفه $\vec{A}$ در راستاهای ox ، oy و oz هستند. بردار یکه راستای oz را $\hat{k}$ می‌نامیم:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

اندازهٔ بردار در این حالت: $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$



شکل 3-4-1-1

است، دلیلش را در شکل 3-4-1-1 می‌بینید:

$$A=\left(\sqrt{A_x^2+A_y^2}\right)^2+A_z^2$$

در مورد جمع برداری نیز تعریف همان تعریف است منتها در فضای سه بعدی روابط مطرح شده با یک مؤلفه اضافی z همچنان معتبر باقی می‌مانند:

$$\vec{A}+\vec{B}=\left(A_x\,,\,A_y\,,\,A_z\right)+\left(B_x\,,\,B_y\,,\,B_z\right)=\left(A_x+B_x\;,\;A_y+B_y\;,\;A_z+B_z\right)$$

برای اثبات رابطه فوق کافی است $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را بفرم: $\vec{A}=\vec{A}_{xy}+\vec{A}_z \;,\; \vec{B}=\vec{B}_{xy}+\vec{B}_z$ بنویسیم طبیعتاً $\vec{A}_z=A_z\hat{k}$ و $\vec{B}_z=B_z\hat{k}$ و $\vec{A}_{xy}$ و $\vec{B}_{xy}$ تصاویر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ در صفحهٔ دو بُعدیند که:

$$\vec{A}_{xy}=\left(A_x,A_y,0\right)\;;\;\vec{B}_{xy}=\left(B_x,B_y,0\right)$$

$$\vec{A}_{xy}+\vec{B}_{xy}=\left(A_x+B_x\;,\;A_y+B_y\;,\;0\right)$$

$$\vec{A}_z+\vec{B}_z=\left(0\,,\,0\,,\,A_z+B_z\right)\Rightarrow\vec{A}+\vec{B}=\left(\vec{A}_{xy}+\vec{A}_z\right)+\left(\vec{B}_{xy}+\vec{B}_z\right)$$

$$\underset{\dagger}{=}\left(\vec{A}_{xy}+\vec{B}_{xy}\right)+\left(\vec{A}_z+\vec{B}_z\right)=\left(A_x+B_x\;,\;A_y+B_y\;,\;A_z+B_z\right)$$

اثبات † بطور هندسی کمی سخت است که خاصیت شرکت‌پذیری جمع است.

به هر صورت می‌توانید با ترفند فوق و استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری در جمع تمام تعاریف دو بعدی را به سه بعدی تعمیم دهید.

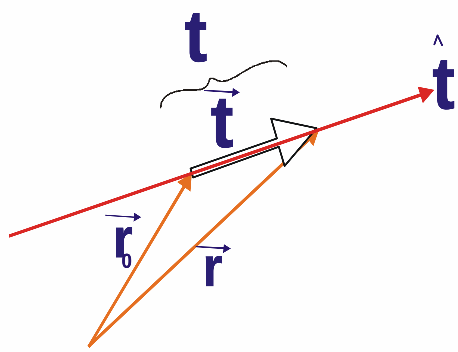
مثلاً ضرب داخلی باز همان است یعنی $\vec{A}\,.\,\vec{B}=AB\cos\eta$

که h زاویه بین جهات $\vec{A}$ و $\vec{B}$ در صفحه‌ای است که از $\vec{A}\,,\,\vec{B}$ می‌گذرد.

رویکرد مؤلفه‌ای آن: $\vec{A}\,.\,\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$

خواهد بود.

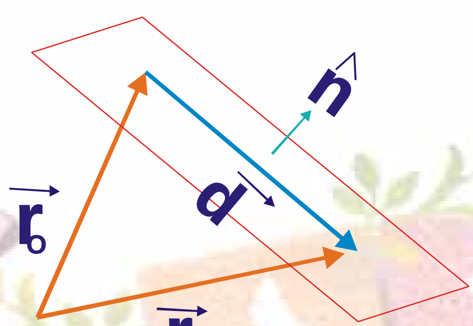
مثال. بردار مکان نقاط روی یک خط را در فضا که جهتش با بردار یکه $\hat{t}$ مشخص شده اســت و از نقطهٔ $\vec{r}_0$ می‌گذرد، برحسب t فاصله نقاط از مکان $\vec{r}_0$ روی خط بیابید:



شکل 3-4-1-2

حل. $\vec{t} = \vec{r} - \vec{r}_0 = t\,\hat{t} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\hat{t}$

مثال. معادله‌ای را برای مجموعه نقاط فضا بنویسید که جوابش بردارهای مکان روی صفحه‌ای را در فضا بدهد که بر بردار یکه $\hat{n}$ عمود است و از نقطه $\vec{r}_0$ می‌گذرد.



شکل 3-4-1-3

حل.

چون $\hat{n}$ بر صفحه عمود است به این معناست که به همهٔ بردارهای درون صفحه عمود است پس:

$$\vec{d} \cdot \hat{n} = 0$$

امّا وقتی که $\vec{r}$ روی صفحه باشد: $\Leftarrow \quad \vec{d} = \vec{r} - \vec{r}_0$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \hat{n} = 0$$

اگر معادله را بصورت مؤلفه‌ای بنویسیم:

$$n_x (x - x_0) + n_y (y - y_0) + n_z (z - z_0) = 0$$

که $\hat{n} \equiv (n_x \ , n_y \ , n_z)$