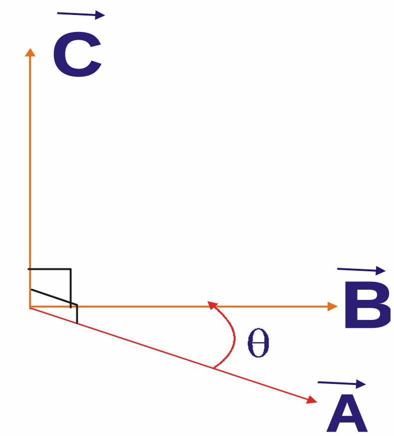
ضرب برداری [1] (ضرب خارجی)

این ضرب، ضربی است که نتیجه‌اش خود برداری است یعنی $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

این ضرب بغیر از فضای سه بعدی در فضاهای پایین‌تری قابل تعریف نیست. بخاطر همین تا این بخش تعریفش نکردیم.

حال برویم سراغ تعریف بردار $\vec{C}$. می‌بایست مـا جهــت و مقــدار $\vec{C}$ را بیــان کنــیم. مقــدار آن $C = AB\,|sin\theta|$ که q زاویه بین جهات $\vec{A}$, $\vec{B}$ است. اما جهت آن چگونه می‌شود؟



شکل 1-2-4-3

راستای جهت آن همواره عمود بر صفحه‌ای است که دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ متعلق به آنند. خوب ایــن راستا دو سو دارد. آن سویی در این راستا جهت را تعیین می‌کند که از قاعدهٔ دست راست تبعیت کنــد، یعنی چنانچه با چهار انگشت دست خود در صفحهٔ $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بخواهیم از $\vec{A}$ به ســمت $\vec{B}$ حرکـت کنــیم

انگشت شست ما آن سو را مشخص کند یا به تعبیر دیگر آن سوی این صفحه که اگر از آن به سمت صفحه نگاه کنیم همواره بردار $\vec{A}$ سمت راست $\vec{B}$ بیفتد.

این ضرب خاص در الکترومغناطیس و دینامیک کاربردهای بسیاری دارد. مثلاً نیروی وارد بر یک بار متحرک با سرعت $\vec{V}$ در یک میدان مغناطیسی باشد $\vec{B}$ مقدار $\vec{F} = q\vec{V} \times \vec{B}$ را خواهد داشت.

یا گشتاور یک نیرو طبق تعریف برابر است با $\vec{t} = \vec{r} \times \vec{F}$ که $\vec{r}$ نقطه اثر نیروی $\vec{F}$ است.

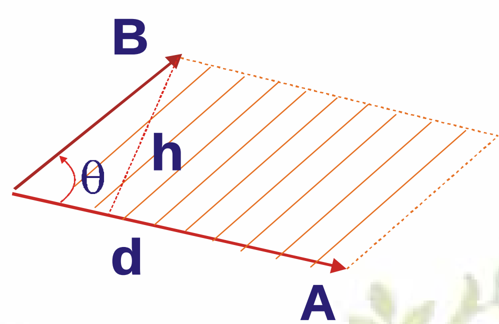
اما خواص این ضرب چیست:

[1-2-4-3] پاد جابجایی $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

[2-2-4-3] $(a\vec{A}) \times \vec{B} = a(\vec{A} \times \vec{B})$

[3-2-4-3] $(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$

دو خاصیت اول از روی تعریف تقریباً بدیهی‌هستند ولی خاصیت آخر را به سادگی نمی‌توان بدست آورد. قبل از آنکه به رویکرد مؤلفه‌ای بپردازیم خوب است تعبیر هندسی ضرب خارجی را ببینیم.



شکل 3-4-2-2

اندازه $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB\,|\sin\theta|$

طبق شکل $h = B\,|\sin\theta|$

که ارتفاع متوازی‌الاضلاع مابین $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است و $A = d$ که d مقدار قاعده ارتفاع h است. طبیعی است که:

$$S = AB\,|\sin q| = dh$$

مساحت متوازی‌الاضلاع تعریف شده خواهد شد. در اصل ضرب خارجی بگونه‌ای برداری را برای مساحت تعریف می‌کند. اندازه این بردار مقدار مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل از $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است که جهت قرارگیری این صفحه با جهت عمود آن که $\vec{A}\times\vec{B}$ داراست مشخص می‌شود.

مثال. مقادیر زیر را بیابید یا ساده کنید؟

$$\vec{A}\times\vec{A}=? \quad \vec{B}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=? \quad \vec{A}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) \quad \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)^2=? \quad \hat{i}\times\hat{j}\ ,\ \hat{j}\times\hat{k}\ ,\ \hat{k}\times\hat{i}=?$$

حل. $\vec{A}\,\|\,\vec{A} \Rightarrow \sin\theta = 0$ چون $\vec{A}\times\vec{A}=\vec{0}$

چون $\vec{A}\times\vec{B}$ بر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عمود است پس:

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=0$$

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)^2=\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|^2=A^2B^2\sin^2\theta=A^2B^2\left(1-\cos^2\theta\right)=A^2B^2-(A\cdot B)^2$$

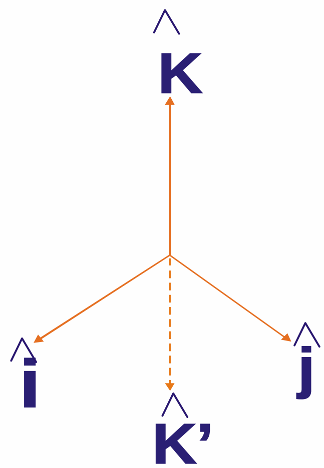
$(\hat{i}\ ,\ \hat{j}\ ,\ \hat{k})$ سه بردار یکه متعامدند که اندازهٔ آنها واحد است پس قطعاً ضرب آنها از آنجا که $\sin\frac{\pi}{2}=1$ است نیز بردار یکه خواهد شد.

می‌دانیم که بردار $\hat{k}$ بر $\hat{i}\ ,\ \hat{j}$ عمود است پس: $\hat{i}\times\hat{j}$ باید موازی $\hat{k}$ باشد و چون مقدارش واحد است پس یا $\hat{k}$ یا $-\hat{k}$ که طبق قاعدهٔ دست راست $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$ و به همین صورت:

$\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$

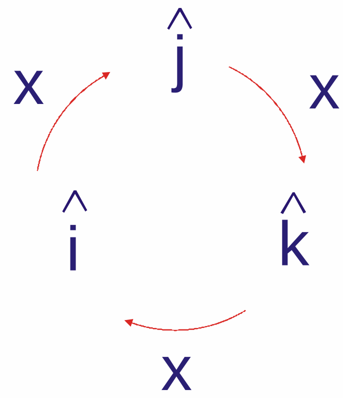
$\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$

نکته‌ای که قبلاً به آن اشاره نشده بود آن بود که سوی $\hat{k}$ به سمت کدامیک از طرفهای صفحه xy است. حال می‌بینیم آن سویی را در نظر می‌گیریم که $\hat{i}\times\hat{j}$ را مساوی با $\hat{k}$ بکند.

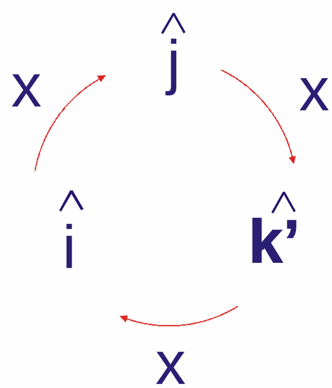


شکل 3-4-2-3

به سه بردار یکه $\left(\hat{i}\ ,\ \hat{j}\ ,\ \hat{k}\right)$ با چنین ترتیبی که دستگاه راست‌گرد گویند یعنی آنکه رابطه ضرب خارجی در آن به فرم زیر است.



اگر مثلاً جای $\hat{k}$ ، $\hat{k}'=-\hat{k}$ در نظر می‌گرفتیم آن وقت سه بـردار $\left(\hat{i}\ ,\ \hat{j}\ ,\ \hat{k}'\right)$ یـک دسـتگاه چپ‌گرد را می‌ساختند زیرا در حالت زیر برای آنکه مؤلفه‌های بردار ضرب خارجی را در مختصات دکارتی بنویسیم باید از رابطه‌های [3-4-2-2] و [3-4-2-3] استفاده کنیم.



$$\vec{A}\times\vec{B}=\left(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}\right)\times\left(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}\right)$$

$$\Rightarrow\vec{A}\times\vec{B}=A_xB_x\ \hat{i}\times\hat{i}+A_xB_y\ \hat{i}\times\hat{j}+A_xB_z\ \hat{i}\times\hat{k}+A_yB_x\ \hat{j}\times\hat{i}+A_yB_y\ \hat{j}\times\hat{j}+A_yB_z\ \hat{j}\times\hat{k}$$

$$+A_zB_x\hat{k}\times\hat{i}+A_zB_y\ \hat{k}\times\hat{j}+A_zB_z\ \hat{k}\times\hat{k}$$

می‌دانیم که روابط مقابل برقرار است:

$$\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=\vec{0}$$

$$\hat{i}=\hat{j}\times\hat{k}=-\hat{k}\times\hat{j}$$

$$\hat{j}=\hat{k}\times\hat{i}=-\hat{i}\times\hat{k}$$

$$\hat{k}=\hat{i}\times\hat{j}=-\hat{j}\times\hat{i}$$

$$\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B}=\left(A_y B_z-A_z B_y\right)\hat{i}+\left(A_z B_x-A_x B_z\right)\hat{j}+\left(A_x B_y-A_y B_x\right)\hat{k}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

بیایید فرض کنیم تعریف ضرب برداری عبارت بالا بود آیا از این تعریف می‌توان به تعریف قبلی بازگشت. می‌دانیم از هر دو بردار یک صفحه می‌گذرد. می‌توانیم دستگاهمان را طوری بگردانیم که $\vec{A}\ ,\ \vec{B}$ در صفحهٔ xy بیفتند. این کار را در صورتی می‌توانیم با موفقیت انجام دهیم که مطمئن باشیم $\vec{A}\times\vec{B}$ یک بردار است.

در این حالت:

$$\vec{A}=\left(A_x\ ,\ A_y\ ,\ 0\right)$$

$$\vec{B}=\left(B_x\ ,\ B_y\ ,\ 0\right)$$

$$\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B}=\left(A_x B_y-A_y B_x\right)\hat{k}$$

امّا $A_x=A\cos\theta_A\quad ,\quad B_x=B\cos\theta_B$

$$A_y = A sin\theta_A \quad , \quad B_y = B sin\theta_B$$

$$\Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = AB\left(cos\theta_A sin\theta_B - sin\theta_A cos\theta_B\right)\hat{k}$$

$$= AB \; sin\left(\theta_B - \theta_A\right)\hat{k} = AB \; sin\left(\theta_{B/A}\right)\hat{k}$$

که واضح است همه قواعد تعریف هندسی در آن هست.

مثلاً اندازهٔ آن دقیقاً تطبیق می‌کند و اینکه جهت $\hat{k}$ عمود بر صفحه $\vec{A}$, $\vec{B}$ است و شیوهٔ نسبی زاویه q که زاویه $\vec{B}$ نسبت به $\vec{A}$ است می‌توان قاعدهٔ دست راست را ایجاد کند.

---

[1] *Vector Product*