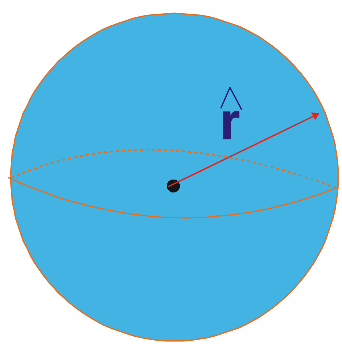
مختصات کروی:[1]

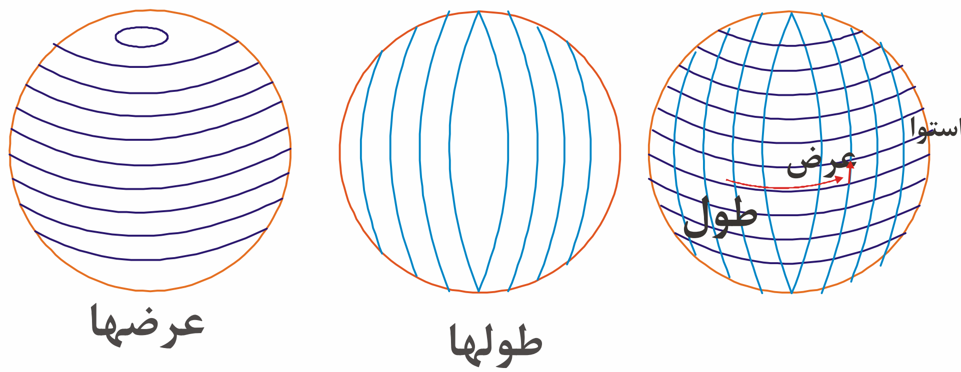
تا بحال در فضای سه بعدی صرفاً یک نوع دستگاه مختصات آن هم دکارتی را بررسی کـردیم. در این بخش می‌خواهیم یکی از دستگاههای مختصات قدیمی را برایتان مطرح کنیم. ایـن دسـتگاه شـبیه دستگاه مختصات قطبی برای دو بعد است. در این دستگاه ما ابتدا یک جهت فضایی را مشخص می‌کنیم و فاصله نقطه را از مبدأ تعیین می‌کنیم. پس این دستگاه شامل $(r , \hat{r})$ است. که r اندازه بردار مکـان و $\hat{r}$ بردار یکه جهت آن است. طبیعی است که $\vec{r} = r\,\hat{r}$ امّا $\hat{r}$ را چگونه معرفی می‌کنیم. بیایید به کـره‌ای به شعاع واحد نگاهی بکنیم.



شکل 3-4-3-1

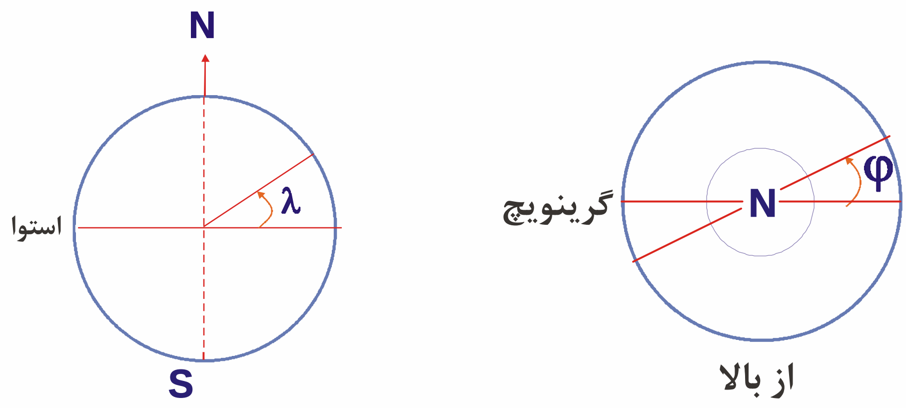
ما برای تعیین هر بردار یکه دلخواه $\hat{r}$ کافی است که نقطه‌ای را که این بردار روی کره نـسبت بـه مبدأ (که مرکز کره است) مشخص می‌کند را بیان کنیم. برای بیان این نقطه راههای مختلفی هـست. امّـا اگر به کره‌های جغرافیایی نگاه بکنید می‌بینیـد کـه نقـاط روی کـرهٔ زمـین را برحـسب عـرض و طـول

جغرافیایی معین می‌کنند. عرضهای جغرافیایی را مدارها و طولهای جغرافیـایی را خطـوط نـصف‌النهـار مشخص می‌کند.



شکل 3-4-3-1

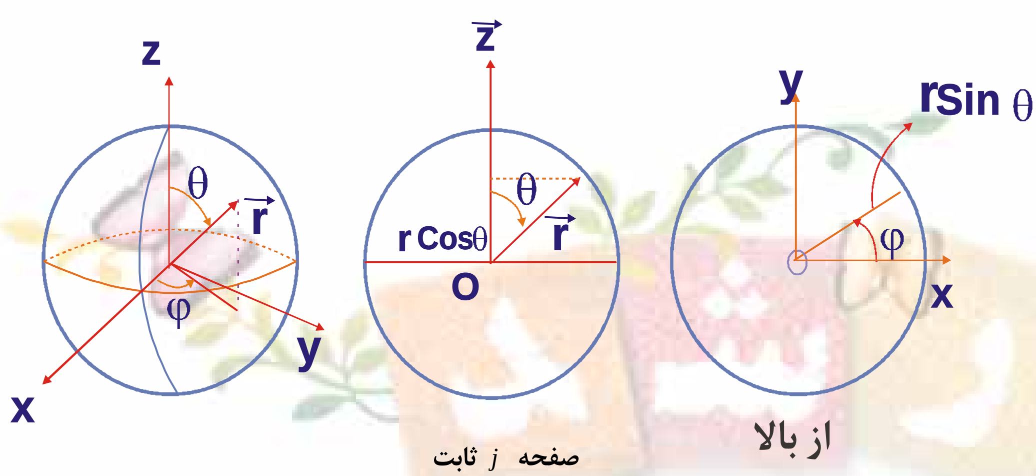
چنین شبکه‌ای بر روی کره می‌تواند تمام نقاط کره را مشخص نمایـد. بـرای بیـان هـر کـدام از مدارها کافی است زاویه آن را با صفحهٔ استوایی زمین بیان کنیم. برای بیان دایره‌های نصف‌النهـار کـافی است زاویه صفحه آنها را با صفحه مرجع که نصف‌النهار گرینویچ است بیان کنیم. معمـولاً ایـن دو زاویـه $(l \;,\; j)$ را برحسب درجه و جهات شمال و جنوب برای l و شرق و غرب برای j بیان می‌کنند. یعنـی مثلاً نقطه‌ای به طول 30 درجه غربی و 45 درجه شمالی به معنای آن است که از نصف‌النهار گرینویچ بـه مقدار 30 درجه بر روی استوا به سمت شرق برویم و سپس روی نصف‌النهاری که از آنجـا مـی‌گـذرد بـه مقدار 45 درجه به سمت شمال حرکت کنیم. این شیوهٔ تعیین نقاط روی کرهٔ زمین در کارهای نجومی نیز برای جهتهای فضایی کاربرد دارد.



شکل 3-4-3-2

البته قراردادها در فیزیک و ریاضیات با قرارداد جغرافیایی کمی تفاوت دارد با اینکه عیناً همان مفهوم را می‌رساند.

در مختصات کروی ما زاویهٔ $q = \frac{p}{2} - l$ (با فرض l شمالی مثبت و l جنوبی منفی) و j را بعنوان نشان‌دهندهٔ جهت در فضا $(\hat{r})$ معرفی می‌کنیم. θ زاویهٔ قطبی است یعنی زاویه هر مدار را نسبت به محور قطبین بیان می‌کند این راستا را محور oz مختصات در نظر می‌گیریم. همچنین صفحه xy را بر صفحه استوایی منطبق می‌کنیم. نصف‌النهار مبدأ هم از محور ox می‌گذرد.



شکل 3-4-3-3

تبدیلات مختصاتهای کروی و دکارتی به هم با توجه به شکل (3-4-3-3) به فرم پایین است.

$$z = r\cos\theta$$

$$\rho = r\sin\theta$$

تصویر $\vec{r}$ در صفحهٔ xy:

$$x = \rho\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = \rho\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi$$

و به طور معکوس:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right) = \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

---

[1] *Spherical Coordinate*