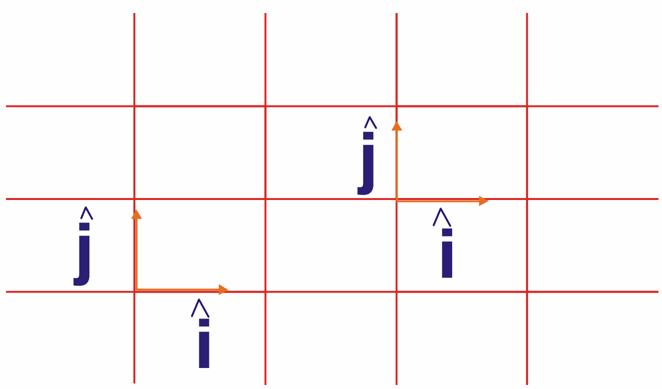
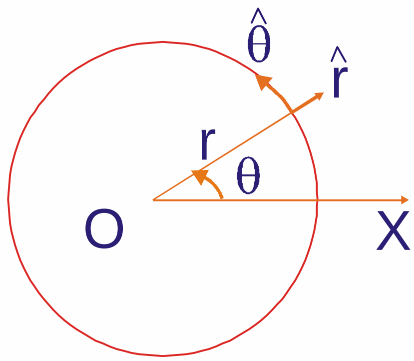
بردارهای یکه مختصاتهای مختلف:

در مختصات کارتزین سه بردار یکه ثابت $\hat{k}$, $\hat{j}$, $\hat{i}$ نشان‌دهندهٔ سه جهت طولی، عرضی و ارتفاعی فضا بودند که در هر نقطه‌ای از فضا طبق چهارچوب، یکسان می‌مانند در اصل اگر دقت کنید بردار یکه‌های مختصات کارتزین جهتی را در هر نقطه نشان می‌دهند که اگر در آن جهت حرکت کنیم صرفاً مختصه مکانی متناظر افزایش می‌یابد. مثلاً با حرکت در جهت $\hat{i}$ در هر نقطه صرفاً مقدار x (و نه z و y) افزایش می‌یابد.



شکل 3-4-5-1

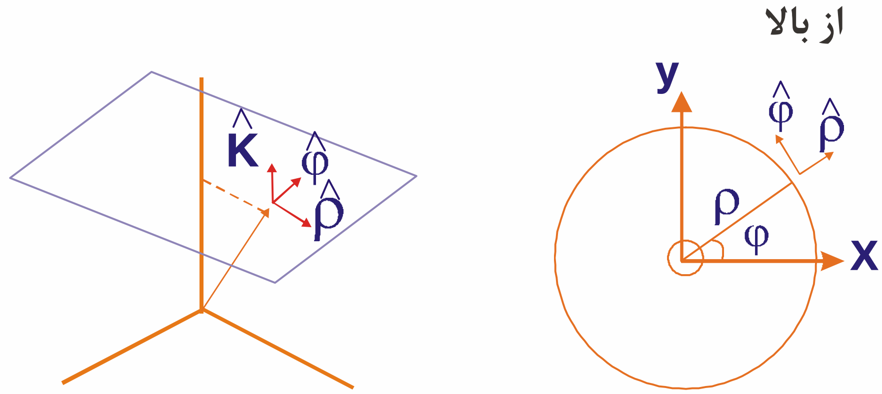
حال سؤال این است که با توجه به خاصیت فوق چطور می‌توان بردار یکه‌های مختصاتهای دیگر را تعریف کرد؟



شکل 3-4-5-2

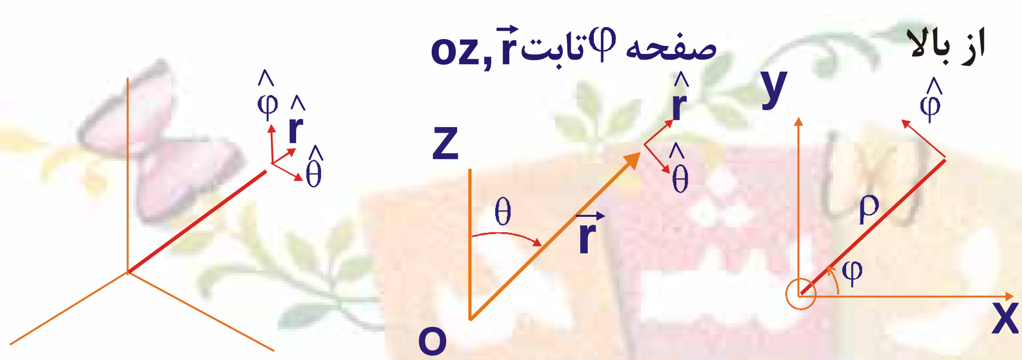
ابتدا سراغ مختصات قطبی دو بعدی برویم $\hat{r}$ بردار یکه‌ای است که جهتی را نشان می‌دهد که با حرکت در آن جهت مقدار r افزایش می‌یابد ولی q تغییر نمی‌کند. اگر یادتان باشد خطوط q ثابت، خطوط شعاعی بودند. پس همانطور که در شکل می‌بینید $\hat{r}$ در راستای شعاعی است و به سمت بیرون.

در مورد مختصه q چطور؟ منحنیهای r ثابت دوایری حول مرکز بودند. در هر نقطه $\hat{q}$[1] مماس بر این دوایر است و به سمتی است که q در حال افزایش است، یعنی سمت مثلثاتی. می‌بینید که در مورد $\hat{q}$ در هر لحظه خواص بردارهای یکه مختصاتی برقرار است و با تغییر q می‌بایست جهت آن را تعویض کنید. کلاً $\hat{r}$ و $\hat{q}$ تابع q آن نقطه مورد نظرند مختصاتی را متعامد[2] می‌گوییم که بردارهای یکه آنها دو به دو متعامد باشد. در مورد $\hat{r}$, $\hat{q}$ بطور بدیهی چنین است. (چون خطوط شعاعی بر دوایر عمودند) امّا مختصات استوانه‌ای چگونه است. کافی است به مجموعه بردارهای یکه قبلی بردار یکه $\hat{k}$ که نشان دهندهٔ راستای z است را اضافه کنیم.



شکل 3-5-4-3

همانطور که در شکل (3-5-4-3) می‌بینید، $\hat{j}$ و $\hat{r}$ داخل صفحه‌ای قرار دارند که موازی صفحهٔ xy است و $\hat{k}$ عمود بر آن. در این حالت نیز مختصات متعامد است. می‌بینید که $\left(\hat{r}\ ,\ \hat{j}\ ,\ \hat{k}\right)$ یک مجموعه راستگرد را می‌سازند. در اینجا نیز $\hat{r}$ و $\hat{j}$ تابع j هستند و به z و r ربطی ندارند. $\hat{k}$ هم که کلاً ثابت است و آخرین مختصات که کمی هم پیچیده است مختصات کروی است. ساده‌ترین بردار یکه $\hat{V}$ است که در جهت افزایش r در هر نقطه از فضاست که همان راستای شعاعی را در هر نقطه به سمت خارج معین می‌کند. چنانچه به صفحهٔ عبوری از بردار $\vec{r}$ و محور oz برویم $\hat{q}$ را هم می‌توان همچون مختصات قطبی به سادگی تعریف کرد. (در این صفحه j ثابت می‌ماند) می‌ماند $\hat{j}$.



شکل 3-4-5-4

چنانچه دقت کرده باشید صفحات j ثابت صفحاتی هستند که حول محور oz می‌چرخند و از آن می‌گذرند و $\hat{j}$ باید بر این صفحات عمود باشد. پس طبیعی است که می‌بایست موازی صفحه xy باشد. پس چنانچه از نقطه مورد نظر خود صفحه‌ای موازی xy رد کنیم $\hat{j}$ در آن واقع است و عمود بر خط واصل آن نقطه بر محور oz می‌باشد. این سه بردار یکه نیز متعامدند و مجموعهٔ $\left(\hat{r}\,,\,\hat{q}\,,\,\hat{j}\right)$ دستگاه راستگردی را می‌سازند. همانطور که می‌بینید این سه بردار یکه تابعی از q و j هستند.

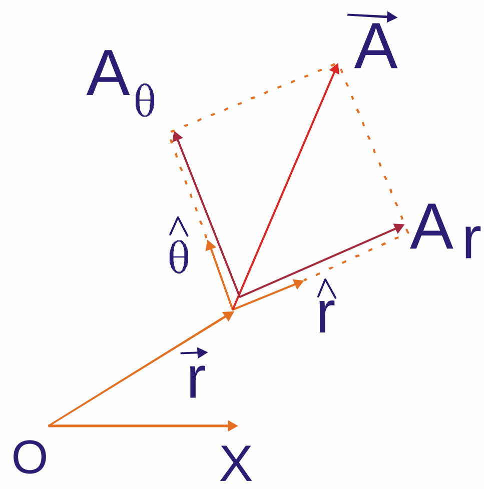
حال سؤال این است که چگونه بردارهای مختلف را برحسب این بردارهای یکه بسط دهیم.

در مختصات دکارتی: $\overset{\vee}{A} = A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k}$

در مختصات کروی ابتدا مکان مورد نظر که بردار $\overset{\vee}{A}$ در آنجاست یا اینکه می‌خواهیم در آن نقطه بررسی کنیم را مشخص می‌کنیم و بردارهای یکه $\hat{r}\,,\,\hat{q}\,,\,\hat{j}$ آن نقطه را تعیین می‌کنیم و چون این سه بردار مجموعه متعامد راستگردی می‌سازند قطعاً می‌توان هر برداری را در آن نقطه به فرم $\overset{\vee}{A} = A_r\hat{r} + A_q\hat{q} + A_j\hat{j}$ نوشت.

در شکل (3-4-5-5) مثالی برای حالت دو بعدی در مختصات قطبی نمایش داده شده است.

$\left(\overset{\vee}{A} = A_r\hat{r} + A_q\hat{q}\right)$



شکل 5-5-4-3

برای مختصات استوانه‌ای هم بالطبع خواهیم داشت:

$$\vec{A} = A_r \hat{r} + A_j \hat{j} + A_z \hat{k}$$

مؤلفه‌ها را به سادگی با ضرب داخلی می‌توان نشان داد مثلاً

$$\hat{r} \cdot \vec{A} = A_r \hat{r} \cdot \hat{r} + A_\theta \hat{r} \cdot \hat{\theta} + A_\varphi \hat{r} \cdot \hat{\varphi} = A_r \times 1 + 0 + 0 = A_r$$

نکته دیگر آنکه تمام تعاریف عملیاتهای برداری که قبلاً به صورت مؤلفه‌ای بیان کرده‌ایم را می‌توان برای مختصاتهای قطبی، استوانه‌ای و کروی نیز بکار برد. یعنی مثلاً ضرب داخلی

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left(A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\varphi}\right) \cdot \left(B_r \hat{r} + B_\theta \hat{\theta} + B_\varphi \hat{\varphi}\right) = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_\varphi B_\varphi$$

البته حواستان باید باشد که حتماً می‌بایست بردارهای یکه که $\vec{A}$, $\vec{B}$ را تعریف می‌کنند یکسان باشند و نسبت به یک نقطه تعریف شده باشند. اگر متفاوت باشند

مثلاً:

$$\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\varphi}$$

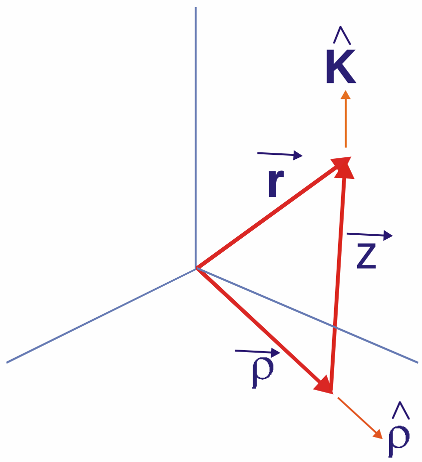
$$\vec{B} = B'_r \hat{r}' + B'_\theta \hat{\theta}' + B'_\varphi \hat{\varphi}'$$

آنگاه جملاتی مانند $\hat{r}\,.\,\hat{\theta}'$ و $\hat{\theta}\,.\,\hat{\theta}'$ و ... را نمی‌توان **0** و **1** و ... در نظر گرفت.

مثال. بردار مکان $\vec{r}$ را در دستگاههای مختلف برحسب بردار یکه‌های مختلف بنویسید:

کارتزین : $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

کروی : $\vec{r} = r\,\hat{r}$ (بردار یکه $\hat{r}$ همان جهت بردار مکان است)



شکل 3-4-5-6

$$\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{z} = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{k}$$

و امّا می‌ماند بیان تبدیل مستقیم بردارهای یکه مختصاتهای متفاوت به هم:

کروی برحسب دکارتی $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(x\ ,y\ ,z\ )}{r} = \frac{(r\sin\theta\cos\varphi\ \ ,\ r\sin\theta\sin\varphi\ \ ,\ r\cos\theta)}{r}$

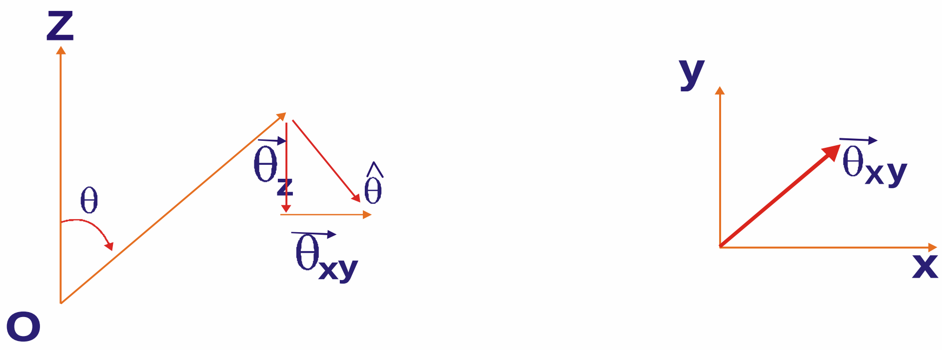
$$=\sin\theta\cos\varphi\ \hat{i} + \sin\theta\sin\varphi\ \hat{j} + \cos\theta\ \hat{k}$$

$$\hat{\theta} = \vec{\theta}_z + \vec{\theta}_{xy} \qquad , \qquad \vec{\theta}_z = -\sin\theta\,\hat{k} \qquad , \qquad \vec{\theta}_{xy} = \cos\theta\left(\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j}\right)$$

$\vec{\theta}_{xy}$ اندازه

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \cos\theta\,\cos\varphi\,\hat{i} + \cos\theta\,\sin\varphi\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{k}$$

$$\hat{\varphi} = \varphi_x\,\hat{i} + \varphi_y\,\hat{j} = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j}$$



صفحه φ ثابت گذرنده از $\vec{r}$ از بالا

شکل 3-4-5-7

تبدیلات معکوس را به سادگی با حل $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ برحسب $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ و $\hat{\varphi}$ بدست آورید.

در مورد مختصات استوانه‌ای داریم:

$$\hat{\rho} = \cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j}$$

$$\hat{k} = \hat{k}$$

امّا کروی با استوانه‌ای

$$\hat{r}=\frac{\vec{r}}{r}=\frac{\rho\,\hat{\rho}+z\hat{k}}{r}=\left(\frac{\rho}{r}\right)\hat{\rho}+\left(\frac{z}{r}\right)\hat{k}=\sin\theta\,\hat{\rho}+\cos\theta\,\hat{k}$$

$$\hat{\theta}=\vec{\theta}_z+\vec{\theta}_\rho=\cos\theta\,\hat{\rho}-\sin\theta\,\hat{k}$$

$$\hat{\varphi}=\hat{\varphi}$$

صحت این روابط را خودتان بررسی کنید.

---

[1] گاهی بردارهای یکه را با $\hat{e}_\theta$ و $\hat{e}_r$ برای θ و r نمایش می‌دهند.

[2] یکه: *Orthogonal / Orthonormal* :متعامد