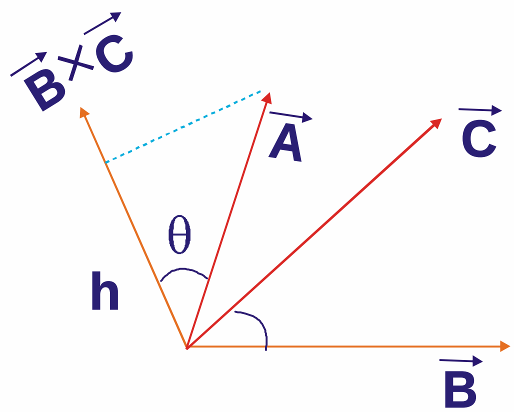
عملیاتهای چندگانه:

به ترکیب مقابل توجه کنید: $\vec{A}\,.\,\vec{B}\times\vec{C}$

آیا باید اول ضرب داخلی را انجام داد یا خارجی را؟



شکل 3-4-6-1

اگر از چپ عمل کنیم با ضرب داخلی $\vec{A}.\vec{B}$ یک عدد می‌شود که دیگر نمی‌تواند در $\vec{C}$ ضرب خارجی شود. پس در اصل مفهوم این عبارت همان $\vec{A}\,.\,(\vec{B}\times\vec{C})$ است. خُب بیایید ببینیم تعبیر هندسی این رابطه چیست. $|\vec{B}\times\vec{C}|$ مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل از $\vec{B}$ و $\vec{C}$ است. جهت $\vec{B}\times\vec{C}$ عمود بر صفحهٔ $\vec{B}$ و $\vec{C}$ است. وقتی $\vec{A}$ در آن ضرب داخلی می‌شود مقدار آن خواهد شد:

$$\left|\vec{A}\,.\,(\vec{B}\times\vec{C})\right| = |\vec{A}|\cos\theta\ |\vec{B}\times\vec{C}| = hS$$

که h ارتفاع $\vec{A}$ نسبت به صفحهٔ $\vec{B}$ و $\vec{C}$ است و S مساحت متوازی‌الاضلاع. پس مقدار $\left|\vec{A}\,.\,\vec{B}\times\vec{C}\right|$ حجم متوازی‌السطوح حاصل از $\vec{A}\,,\,\vec{B}\,,\,\vec{C}$ است. طبیعی است اگر این حجم را با جابجایی مکانهای $\vec{A}\,,\,\vec{B}\,,\,\vec{C}$ در $\vec{A}\,.\,\vec{B}\times\vec{C}$ حساب کنیم تغییری نکند.

منتها حواسمان باید باشد که ترتیب از جهت گردش (راست‌گردی یا چپ‌گردی) ثابت بماند وگرنه مقدار کمیت منفی خواهد شد. برای این منظور کافی است صرفاً چرخشی انجام دهیم.

$$\vec{A}.\vec{B}*\vec{C}=\vec{C}.\vec{A}*\vec{B}=\vec{B}.\vec{C}*\vec{A}$$

می‌توان بفرم دیگری نیز این حاصلضرب سه‌گانه را نشان داد:

$$\vec{A}\,.\,\vec{B}\times\vec{C}=\left(A_x\ ,A_y\ ,A_z\right)\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

در این حالت هم می‌دانیم که هر بار جابجایی سطرها، مقدار دترمینان را منفی می‌کند پس با دو بار جابجایی که یک گردش خواهد شد علامت عوض نخواهد شد و اتحاد سابق مشاهده می‌شود. از جمله ضربهای سه‌گانه معروف $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$ است که محاسبه مستقیم آن چیزی نزدیک به فاجعه است. این مقدار بطور عجیبی در اتحاد «بک-کب» ساده می‌شود:

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\left(\vec{A}.\vec{C}\right)-\vec{C}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)$$

طبیعی است که ابتدا ضربهای داخلی صورت می‌پذیرد و سپس عدد حاصل در بردار ضرب می‌شود چیزی شبیه این اتحاد را بعداً در آنالیز برداری خواهید دید.

مثال. نیروی مغناطیسی که دو بار متحرک به اندازهٔ $q_1\,,\,q_2$ و بردارهای سرعت $\vec{V}_1\,,\,\vec{V}_2$ به هم وارد می‌کنند (برای سرعتهای خیلی کمتر از C) تقریباً از رابطهٔ زیر تبعیت می‌کند:

$$\vec{F}_{21}=\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\;\frac{\vec{V}_2}{C}\times\left(\frac{\vec{V}_1}{C}\times\vec{r}_{21}\right)$$

که $\vec{r}_{21}$ بردار مکان نسبی بار 2 بــه 1 اســت و $\vec{F}_{21}$ نیــروی وارد بــر 2 از بــار 1 اســت. همچنــین $r=\left|\vec{r}_{21}\right|$. نشان دهید که $\vec{F}_{21}\neq-\vec{F}_{12}$ و قانون سوم نیوتن در این مورد برقرار نیست. (از مثالهای نقــض مکانیک نیوتنی)

حل.

$$\vec{A}_{21}=\vec{V}_2\times\left(\vec{V}_1\times\vec{r}_{21}\right)\overset{\text{(بک-کب)}}{=}\vec{V}_1\left(\vec{V}_2\cdot\vec{r}_{21}\right)-\vec{r}_{21}\left(\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2\right)$$

$$\vec{A}_{12}=\vec{V}_1\times\left(\vec{V}_2\times\vec{r}_{12}\right)\overset{\text{(بک-کب)}}{=}\vec{V}_2\left(\vec{V}_1\cdot\vec{r}_{12}\right)-\vec{r}_{12}\left(\vec{V}_2\cdot\vec{V}_1\right)$$

چون $\vec{r}_{12}=-\vec{r}_{21}$

$$\Rightarrow\quad \vec{A}_{12}=-\vec{V}_2\left(\vec{V}_1\cdot\vec{r}_{21}\right)+\vec{r}_{21}\left(\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2\right)$$

حال $\vec{A}_{12}+\vec{A}_{21}=\vec{V}_1\left(\vec{V}_2\cdot\vec{r}_{21}\right)-\vec{V}_2\left(\vec{V}_1\cdot\vec{r}_{21}\right)$

که واضح است اگر $\vec{V}_1$ با $\vec{V}_2$ موازی نباشد قطعاً صفر نمی‌شود.

$$\vec{V}_1\nparallel\vec{V}_2\qquad\Rightarrow\quad\vec{A}_{12}+\vec{A}_{21}\neq\vec{0}$$

$$\Rightarrow\quad\vec{A}_{12}\neq-\vec{A}_{21}$$

$$\Rightarrow\quad\vec{F}_{12}\neq-\vec{F}_{21}$$