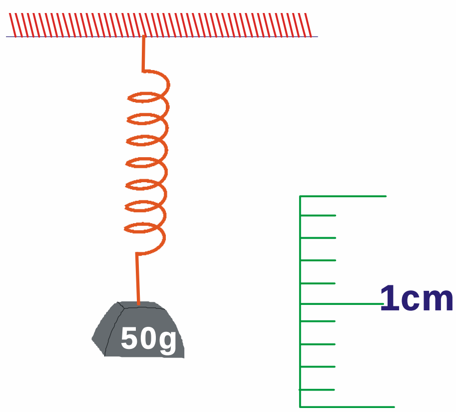
ما در فیزیک اندازه می‌گیریم یعنی به واقعیتهای فیزیکی عددی ریاضی نسبت می‌دهیم. امّا برای چه؟

برای آنکه معتقدیم بین اعداد مختلفی که وجود دارد رابطه‌ای موجود است. یعنی چه؟ این که اگر مثلاً فنری داشته باشیم مانند شکل 4-1-1-1 چنانچه وزنه‌ای به مقدار اندازه‌گیری شده 50 گرم را بـه آن آویزان کنیم و ببینیم که فنر به اندازهٔ $1\ cm$ کش می‌آید آنگاه اگر بار دیگری دوباره وزنهٔ 50 گرمی را آویزان کنیم همان $1\ cm$ فنر کش خواهد آمد و نه 33 سانتیمتر.



شکل 4-1-1-1

این یعنی آنکه بین 50 گرم و 1 سانتیمتر رابطه‌ای هست کـه فنـر آن را ایجـاد کـرده. در اینجـا خواهیم گفت که تغییر طول فنر تبعیت می‌کند از مقدار وزنه‌ای که به آن آویزان شده است. یعنی به ازای هر وزنه‌ای یک تغییر طول خاص وجود دارد.

می‌توانست دنیا بدین گونه نباشد ولی تجربه نشان داده که تا بحال به این فرم بوده یعنـی اینکـه می‌توان آنقدر کمیت در مورد یک پدیده یا واقعیت فیزیکی اندازه‌گیری کرد که بـالاخره مجموعـهٔ ایـن

اعداد همیشه با هم اتفاق بیفتند و تصادفی نباشند. البته چون ما فعلاً روی حساب تک متغیره بحث می‌کنیم تعداد اندازه‌گیریهای ما 2 مقدار است یعنی صرفاً پدیده‌هایی را مد نظر قرار می‌دهیم که با 2 مقدار بطور یکتا رابطه تعیین می‌شود.

فرض کنید دمای هوای اتاق خود را در روزهای مختلف اندازه بگیرید و نتیجه جدول 4-1-1-1 شود. طبیعی است که در هر روز خاص میانگین دما صرفاً یک عدد خاص است یعنی این که دمای اتاق تبعیت می‌کند از آنکه چه روزی اندازه‌گیری شود ولی می‌تواند در دو روز مختلف مثلاً یکشنبه و سه‌شنبه دمای اتاق یک عدد یعنی $22\ ^oC$ شود ولی هیچگاه دمای اتاق بطور متوسط در یک روز 2 عدد نمی‌شود. یا در مورد مثال فنر باز تبعیت به این معناست که به ازای وزنهٔ 50 گرمی صرفاً یک عدد (که $1cm$ است) فنر کش می‌آید نه هر بار یک عدد دلخواه.

روز	دما ^oC
شنبه 88/1/1	21
یک‌شنبه 88/1/2	22
دوشنبه 88/1/3	20
سه‌شنبه 88/1/4	22
چهارشنبه 88/1/5	24
پنجشنبه 88/1/6	23
جمعه 88/1/7	25

جدول 4-1-1-1

به این مفهوم در ریاضیات تابع[1] گویند. یعنی آنکه مجموعه‌ای ایجـاد کنـیم کـه در آن مجموعـه زوجهای مرتبی وجود دارند و به ازای مؤلفه اول این زوج مرتبها صرفاً یک مؤلفه دوم وجود داشته باشد.

چطور؟ اینکه مثلاً وزنه‌های مختلف ممکن را x بگیریم که $x \in W$ که W تمام وزنـه‌هـای موجـود است. آنگاه y تغییر طول فنر را که اندازه می‌گیریم به ازای x خاص ایجادکنندهٔ این تغییر طـول در یـک زوج مرتب قرار دهیم $(x\ ,\ y)$ و حال بیان ریاضی تبعیت y از x به صورت بیـان تمـام $(x\ ,\ y)$ هاسـت یعنی:

تابع فنر $= \{ (x\ ,\ y) \mid (x$ **: تغییر طول به ازای وزنهٔ** $y\}$

این همان جدول اندازه‌گیری خودمان است که به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتبها بیان کرده‌ایـم. امّا خاصیت مهم این زوجها در چیست که مفهوم تبعیت را می‌رساند؟

آنست که به ازای یک وزنه دو مقدار متفاوت تغییر طول نداشته باشیم. یعنی اگر در دو آزمـایش مختلف تغییر طول فنر را y_1 و y_2 اندازه بگیریم و این دو مقدار یکـی نباشـند $(y_1 \neq y_2)$ آنگـاه حتمـاً می‌دانیم که وزنه‌های آویزان به فنر در دو مورد x_1 و x_2 با هم مساوی نبوده‌اند : $(x_2 \neq x_1)$ زیـرا هـر x صرفاً یک y را مشخص می‌کند.

پس به بیان ریاضی تابع مثلاً F مجموعه‌ای از زوج‌مرتبهاست که دارای خاصیت زیر است:

$$F = \{(x\ ,\ y)\}$$

که $(x_1\ ,\ y_1) \in F \ \wedge\ (x_2\ ,\ y_2) \in F \ \wedge\ x_1 = x_2$

$$\Rightarrow\ y_1 = y_2$$

مجموعه‌ای را که متغیر x نمایندهٔ آن است را دامنهٔ[2] تابع می‌گویند.

$$F=\{(x\,,\,y)\ \mid\ x\in D\}$$

دامنه

در مسائل ما اکثراً $D \subseteq$ است.

مثال. آیا مجموعهٔ زیر یک تابع است؟

$$\{(1\,،\,1)\ \text{و}\ (2\,،\,3)\ \text{و}\ (3\,،\,5)\ \text{و}\ (1\,،\,-1)\}$$

جواب. خیر. زیرا $(1\,،\,1)$ و $(1\,،\,-1)$ هر دو عضو این مجموعه‌اند در حالیکه $-1\neq 1$.

در مسائلمان x را یعنی مؤلفه اول را متغیر مستقل و y را یعنی مؤلفهٔ دوم را متغیر وابسته می‌گوییم.

حاصل یا خروجی یک تابع همان مؤلفه‌های دوم زوج مرتبها هستند. این خروجیها خود مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهند که به آن برد[3] تابع می‌گویند.

برد $R=\{\,y \mid\ \exists x \ni\ (x,y)\ \in\ F\,\}$

در مسائل ما معمولاً $R \subseteq$ است.

گاهی برای نمایش اعضای یک تابع از نماد زیر استفاده می‌کنند:

$$F=\{(x,y) \mid\ y=f(x)\ ,\ \ x\in D\}$$

$"y=f(x)"$ یعنی y (متغیر وابسته) تابعی است (f) از x (متغیر مستقل).

این نماد بطور صوری شیوهٔ تبعیت y را برحسب x بیان می‌کند.

نوع دیگر نمایش یک تابع به فرم

$$f:\ D\to C$$

است که D دامنه و C مجموعه است که برد زیر مجموعهٔ آن است. چنانچه $C = R$ باشد تابع را پوشا[4] می‌گوییم.

ما معمولاً به طور خلاصه از نماد $f(x)$ برای نشان دادن تابع f از متغیر x استفاده می‌کنیم. بعدها مزیت این شیوهٔ نمایش را خواهید دید.

مثال. می‌توان یک تابع را مثلاً به فرم زیر تعریف کرد:

$$F = \left\{ (x, y) \mid \; y = x^2 \;\;,\;\; x \in \quad\;\;,\;\; x > 0 \right\}$$

در اینجا به فرم $f(x)$ خواهیم داشت:

$$f(x) = x^2 \quad , \quad x \in \quad , \; x > 0$$

یا

$$f : \;\; ^{+} \rightarrow \qquad ; \quad f(x) = x^2$$

مجموعهٔ رابطهٔ وارون یک تابع را به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$rF = \{ (y, x) \mid \;\; (x, y) \in F \}$$

یعنی صرفاً جای مؤلفه‌ها را در F با هم عوض می‌کنیم. امّا چه شرطی لازم است تا rF خود تابع باشد. طبق تعریف تابع باید:

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

پس صرفاً توابعی که این خاصیت را داشته باشند می‌توانند وارونی داشته باشند که خود تابع باشد. به این خاصیت یک به یک[5] بودن تابع می‌گویند. البته همچنین تابع ما می‌بایست پوشا نیز باشد تا درونش تابع شود.

پس در کل می‌توان گفت تابع f در صورتی تابع معکوس[6] f^{-1} را دارد که f "پوشا و یک به یک[7]" باشد.

می‌دانیم که

$F=\{(x,\ f(x))\}$ و

$F^{-1}=\left\{\left(y\ ,\ f^{-1}(y)\right)\right\}$ (معکوس F)

امّا تعریف تابع معکوس می‌گوید که

$y=f(x) \quad \Rightarrow \quad x=f^{-1}(y)$ یا $x=f^{-1}(f(x))$

طبیعتاً چون $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$ است پس $x=f\left(f^{-1}(x)\right)$ هم خواهد شد.

جمع و تفریق و ... در توابع تعریفشان بسیار ساده است:

$$(f\pm g)(x) := f(x)\pm g(x)$$

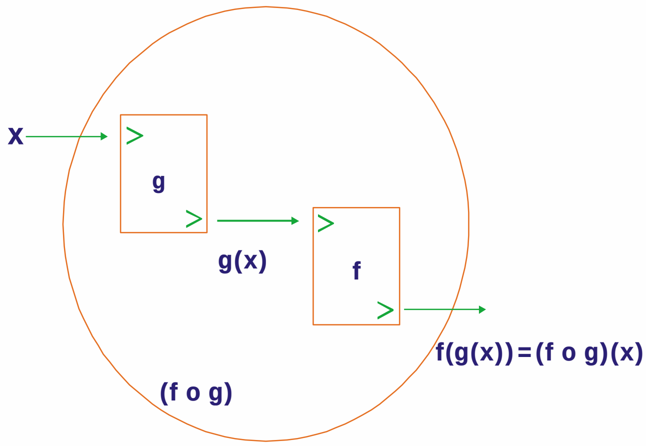
$$(f.g)(x) := f(x)\,g(x)$$

$$(f/g)(x) := {f(x)}/{g(x)}$$

و امّا تعریف جدید ترکیب دو تابع است:

$$(fog)(x) := f(g(x))$$

این تعریف در صورتی با معناست که $D_f=R_g$. این تعریف می‌گوید که ابتدا عدد x را که $x\in D_g$ است وارد تابع g بکنید و خروجی آن را که $g(x)$ است و $g(x)\in R_g$ وارد تابع f بکنید و نتیجهٔ حاصل را بعنوان مقدار ترکیب دو تابع گزارش بدهید.



شکل 4-1-1-2

مثلاً

$$g(x) = x^3$$

$$f(y) = \tan y$$

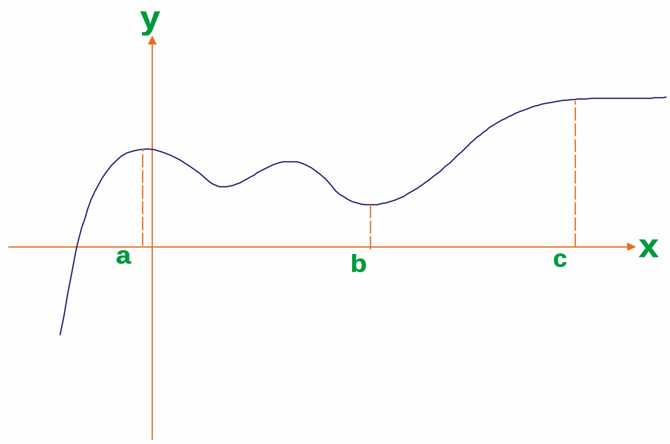
$$\Rightarrow (fog)(t) = f(g(t)) = f\left(t^3\right) = \tan t^3$$

از این تعریف پیداست که $f \ o\ f^{-1} = f^{-1} o\ f$ مانند " یک " می‌مانند یعنی بر هر ورودی اثر کنند خودش را بر می‌گردانند.

چنانچه بتوانیم راهی پیدا کنیم که توابع را بطور گرافیکی بکشیم آن وقت درک وفهم بهتری از شیوهٔ رفتار آنها پیدا خواهیم کرد. این کار را به سادگی می‌توان انجام داد.

کافی است که مجموعهٔ نقاطی را که زوج مرتبهای یک تابع معرفی می‌کنند را در صفحهٔ مختصات دکارتی بکشیم.

در شکل 4-1-1-3 نمودار تابع دلخواهی را می‌بینید.



شکل 4-1-1-3

در این نمودار شما می‌توانید به چیزهای جالبی دست یابید. مثلاً آنکه بـرای x هـای بزرگتـر از C $(x>C)$ تقریباً مقدار تابع ثابت مانده است و یا در $x=b$ مقدار تابع بطور موضعی کمینه (مینیمم) شـده است و یا در $x=a$ بیشینه (ماکزیمم) شده است. همچنین برای $x<a$ تابع به سرعت در حال افـزایش است و ...

از نکات جالب دیگر این تابع آن است که شما با یک سری از نقاط گسسته سر و کار ندارید بلکـه شکل نمودار منحنی پیوسته[8] است. پیوستگی به آن معناست که به ازای زوج مرتب $(x,y)\in F$ در هر فاصلهٔ دلخواهی (هر قدر کوچک) حتماً نقطهٔ دیگر (x',y') وجود دارد که $(x',y')\in F$ و $x'\neq x$. در این صورت می‌گوییم که تابع در نقطهٔ (x,y) پیوسته است. البته این تعریف دقیق و متعارف پیوستگی در ریاضیات نیست و دارای اشکالاتی است. در ریاضی بیشتر روی متغیر مستقل به تنهایی تأکید می‌شود که نتیجه‌اش بر روی خروجی تابع ظاهر می‌شود.

در بخش بعدی یعنی " حد " تعریف متعارف پیوستگی را ارائه خواهیم داد.

[1] *Function*

[2] *Domain*

[3] *Range*

[4] *Surjective*

[5] *One to One (or injective)*

[6] *Inversefunction*

[7] *Bijective*

[8] *Continuous*