در بخش قبلی تابع معرفی شد. حال نوبت به مفهومی به نام حد[1] در ریاضیات می‌رسد.

حتماً تا بحال نام «بینهایت»[2] را در ریاضیات شنیده‌اید. اساساً مفهوم بینهایت یک مفهوم جـدی است. یعنی اینکه بینهایت را آن چیزی در نظر می‌گیریم که از تمام اعداد بزرگتر باشد.

$$\forall N \in \qquad \infty > N$$

یا

$$\forall r \in \qquad \infty > r$$

به هر صورت بینهایت آن چیزی است که هیچگاه به آن نمی‌توان رسید و حد بالای تمام اعداد است.

فرض کنید طول پاره‌خطی به مقدار واحد را نصف کنیم. سپس آن نصف را مجــدداً نــصف کنــیم و ... در نهایت چه عددی حاصل خواهد شد؟

$$1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{8}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{1}{2^n}$$

بعد از n مرتبه نصف‌کردن مقدار طول حاصل $\frac{1}{2^n}$ خواهد بود.

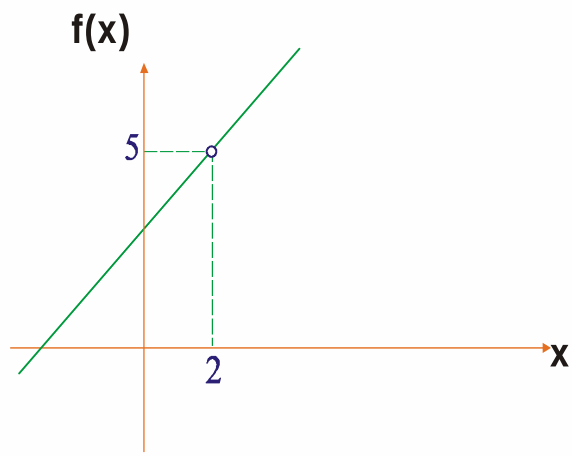
اگر بتوانیم بینهایت بار نصف کنیم مقدار طول چقدر می‌شود؟ اعداد بدست آمده نشان می‌دهند کـه $\frac{1}{2^n}$ یواش یواش با افزایش n به سمت صفر می‌رود. ولی آیا مقدار $\frac{1}{2^n}$ هیچگاه صفر خواهد شد؟ قطعاً نه بلکه اگر به سمت ∞ برویم مقدار $\frac{1}{2^n}$ به سمت صفر می‌رود. به بیان ریاضی خواهد شد.

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0\right) \quad \text{یا} \quad \left(\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ \frac{1}{2^n}=0\right) \quad \text{یا} \quad \left(n\to\infty : \frac{1}{2^n}\to 0\right)$$

در تمام تعابیر بالا اگر n میل کند به بینهایت، $\frac{1}{2^n}$ میل می‌کند به سمت صفر یعنی حد $\frac{1}{2^n}$ وقتی n به سمت بینهایت می‌رود صفر است.

من قصد بیان دقیق‌تر حد را ندارم ولی در کتب مختلف " حساب دیفرانسیل و انتگرال" می‌توان تعریف دقیق ریاضی آن را ببینید.

بیایید تابع حقیقی $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x-2}$ را بررسی کنیم.



$$f(x):\begin{cases} x+3 & x\neq 2 \\ \text{وجود ندارد} & x=2 \end{cases}$$

مطابق با ضابطهٔ تابع در $x=2$ خواهیم داشت $\frac{4+2-6}{2-6}=\frac{0}{0}$ که بی‌معنا اســت. ولــی در بقیــه مقادیر $\frac{(x+3)(x-2)}{x-2}=x+3$، نمودار تابع را نیز می‌بینید که شامل تمام نقاط $x+3$ هست به غیــر از (5 و 2).

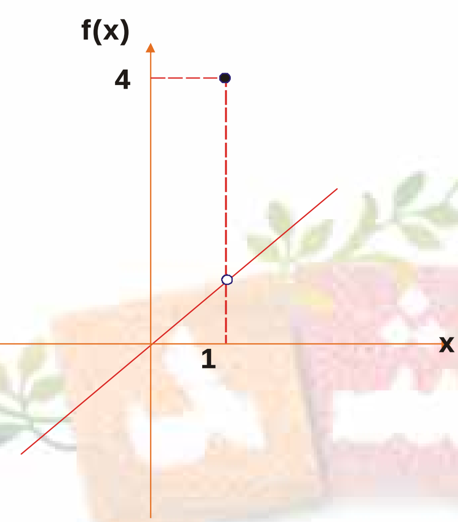
حال سؤال اینجاست که اگر ما مثلاً از سمت راست بینهایت بار بــه نقطــه $x=2$ نزدیــک شــویم انتظار داریم مقدار تابع به کدام عدد نزدیک شود؟

طبیعی است که به عدد 5 گرچه هیچگاه مقدار نخواهد شد ولی حد تابع وقتی x به 2 نزدیک مــی‌شــود برابر 5 است.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=5$$

در مورد نقطهٔ دیگر مثلاً $x=0$ چطور؟ در اینجا $\lim_{x\to 0} f(x)=3$ خواهد شد که مقدار خــود تــابع نیــز $f(0)=3$ می‌باشد.

حال فرض کنید تابع به فرم



$$f(x):\begin{cases} x & x \neq 1 \\ 4 & x = 1 \end{cases}$$

در این حالت حدس می‌زنید $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ چقدر باشد؟

1 ، 4 یا هیچکدام؟

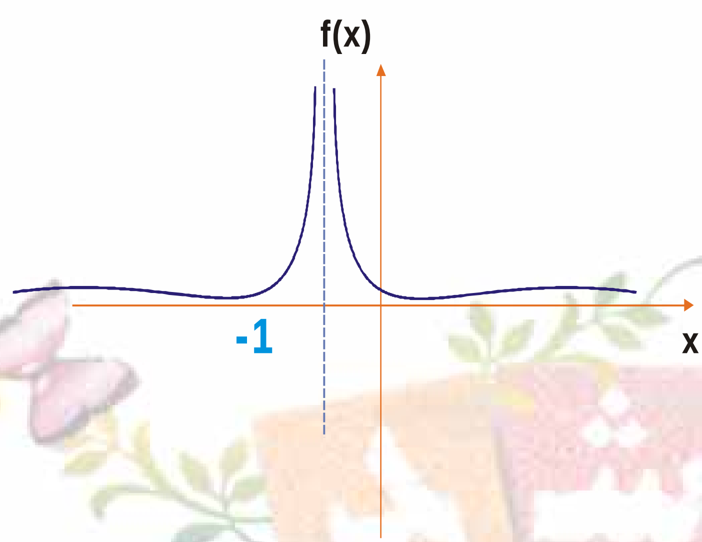
در این حالت حد تابع همان 1 است. درست است که مقدار تابع یعنی $f(1)=4$ است ولی انتظارات ما وقتی خیلی (بینهایت بار) به $x=1$ نزدیک می‌شویم از خروجی تابع عدد 1 است نه 4.

مثال. حال تابع $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ را در نظر بگیرید.

مقدار $f(-1)$ و $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ را بدست آورید. مقدار $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ چقدر است.

جواب. $f(-1)$ که وجود ندارد زیرا $\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}$ معنایی ندارد.

امّا در مورد حد آن چطور، بیایید به نمودار تابع نگاهی بیندازیم.



می‌بینید هر چقدر از هر دو طرف به $x=-1$ نزدیک می‌شویم تابع بدون هیچ محدودیتی همــواره زیــاد می‌شود و این همان تعریف بینهایت است.

پس $\lim_{x\to -1} f(x)=\infty$

در مورد حد آخر بدیهی است هر چقدر x زیاد شود $f(x)$ به صفر نزدیک می‌شود.

پس $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

- پیوستگی به معنای دقیق یعنی آن که حد تابع در نقطهٔ پیوسته با مقدارش یکی شود.

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ پیوسته است. $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

این را می‌توانید مثلاً در مورد تمام مثالهای قبلی امتحان کنید و برابری این تعریف را با شهودمان از تابع پیوسته مطابقت دهید.

مثال. حد $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}$ را حساب کنید.

جواب. $\sin(0)=0$ پس حد در حالت $\frac{0}{0}$ اتفاق می‌افتد که قطعاً تابع مقداری ندارد.

برای حل این حد از یک نامساوی مثلثاتی استفاده می‌کنیم:

$\sin\theta\le\theta\le\tan\theta$

بر روی دایرهٔ مثلثاتی این نامساوی بدیهی خواهد بود. (q همیشه برحسب رادیان اســت.) فــرض کنید $0\le q<\frac{p}{2}$ باشد آنگاه:

$$sinq \le q \le \frac{sinq}{\cos q} \Rightarrow 1 \le \frac{q}{sinq} \le \frac{1}{cosq}$$

$$\Rightarrow cosq \le \frac{sinq}{q} \le 1$$

می‌دانیم که $\lim\limits_{\theta \to 0} cos\theta = 1$ پس مقدار $\frac{sin\theta}{\theta}$ در حد به سمت صفر در نامساوی زیر قرار خواهد گرفت:

$$1 \le \lim_{\theta \to 0} \frac{sin\theta}{\theta} \le 1$$

که بدیهی است می‌بایست $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{sin\theta}{\theta} = 1$ باشد.

در حل این مثال به طور ضمنی از قضیهٔ ساندویچ[3] استفاده شد که می‌گوید:

(a حواشی): $g(x) \le f(x) \le h(x) \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) \le \lim\limits_{x \to a} f(x) \le \lim\limits_{x \to a} h(x)$

مثال. حاصل $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ چه می‌شود؟

جواب. در اینجا ما با یک فرآیند جمع‌کردن بینهایتی روبرو هستیم که قطعاً و عملاً ممکن نیست ولی می‌توان آنرا ابتدا درست تعریف کرد و پس از آن با مفهوم حد آن را جمع بست.

S_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{\text{جمله}}$$

طبق تصاعد هندسی می‌دانیم مقدار آن خواهد شد:

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

حال جمع بینهایت جمله به معنای آن است که حد $n \to \infty$ را حساب کنیم:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 2 - 0 = 2$$

قضایایی در حد هستند که می‌توانند برای حل مسائل مفید باشند گرچه خیلی از آنها بدیهی‌هستند ولی گفتنشان خالی از فایده نیست:

$$\lim \left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$$

$$\lim\left(f(x) \,.\, g(x)\right) = \lim f(x) \,.\, \lim g(x)$$

اگر $\lim g(x) \neq 0$: $\lim \left(f(x) / g(x) \right) = \lim f(x) / \lim g(x)$

اگر f **در** $\lim g(x)$ **پیوسته باشد:** $\lim(f(g(x))) = f(\lim g(x))$

---

[1] *Limit*

[2] *Infinity*

[3] *Squeeze Theorem*