در بخش قبلی مشتق توابع پرکاربردی همچون x^n، $sin\, x$ ، $cos\, x$ و e^x را گرفتیم، کافی است قواعدی برای ترتیب توابع و عملیاتهای روی توابع ارائه دهیم تا مجموعۀ زیادی از توابع را بتوانید مشتق بگیرید.

قواعد زیر به سادگی قابل تحقیق هستند:

$$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\left(a\, f(x)\right)' = a\, f'(x)$$

$$\left(f(x-a)\right)' = f'(x-a)$$

مثال. مشتق زمانی $x(t) = \frac{a}{2}t^2 + V_0 t + x_0$ برحسب قواعد فوق بدست آورید.

حل.

$$\left(\frac{a}{2}t^2 + V_0 t + x_0\right)^{\cdot} = \left(\frac{a}{2}t^2\right)^{\cdot} + \left(V_0 t\right)^{\cdot} + \dot{x}_0$$

$$= \frac{a}{2}\dot{(t^2)} + V_0 \dot{t} + \dot{x}_0$$

$$= at + V_0 + 0 = at + V_0$$

که همان نتیجۀ بخش قبل است.

بیایید مشتق حاصل‌ضرب دو تابع را برحسب مشتقات خودشان بیان کنیم. شاید ابتدا به نظرتان برسد که مشتق $f(x)g(x)$ برابر $f'(x)g'(x)$ باشد ولی این طور نیست.

$$\left(f(x)g(x)\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\ g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)g(x+h) + f(x)\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\right\}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

بیایید مشتق معکوس یک تابع را حساب کنیم. (منظور از معکوس $\frac{1}{f}$ است نه f^{-1})

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)}{f(x)f(x+h)} = -f'(x)\Big/\left(f(x)\right)^2$$

حال با استفاده از دو قاعدهٔ فوق مشتق $\frac{f(x)}{g(x)}$ قابل حساب کردن است.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

مثال. مشتق $\tan x$ را بیابید.

حل.

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

مثال. مشتق $\frac{x}{\sqrt{x+3}}$ را بیابید.

حل. ابتدا باید بدانیم که مشتق $\sqrt{x+3}$ چه تابعی می‌شود. قابل اثبات است که مشتق تـابع x^r که $r \in$ است برابر است با $\left(x^r\right)' = r\,x^{r-1}$. ما این رابطه را بـرای حالـت $r=n$ کـه $n \in$ بـود اثبات کردیم ولی می‌شود برای $r \in$ هم اثبات کرد که کار سختی است و خـارج از حوصـلهٔ مباحـث مورد نظر ما می‌باشد.

$$\left(\sqrt{(x+3)}\right)' = \left((x+3)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(x+3)^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

حال خواهیم داشت:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x+3}}\right)' = \frac{\sqrt{x+3} - \frac{x}{2\sqrt{x+3}}}{x+3} = \frac{1}{\sqrt{x+3}}\left(1 - \frac{x}{2x+6}\right)$$

از مهمترین قواعد مشتق‌گیری، قاعده مشتق تابع مرکب است یعنی مشتق $\left(f(g(x))\right)'$ که به آن قاعدهٔ زنجیره‌ای[1] می‌گویند.

قبل از آنکه این قاعده را بیان کنیم بهتر است کمی در مورد نمادهای دیگر معادل با مشتق‌گیـری در ریاضیات صحبت کنیم.

گاهی مشتق را با D نمایش می‌دهند یعنی $f'(x) = Df(x)$

گاهی با نماد $\frac{d}{dx}$ یعنی $f'(x) = \frac{df}{dx}$

بیایید در مورد معنی نماد دوم صحبت کنیم. فرض کنید بخواهیم مشتق f را در x حساب کنیم آنگاه چه خواهیم کرد تغییرات f را برحسب تغییرات x بدست آورده حاصل را بر هم تقسیم می‌کنیم آنگاه حد Δxهای کوچک را می‌گیریم یعنی:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$ (Δx همان h می‌شود)

یک قرارداد آنست که چیزی به نام دیفرانسیل x [2] تعریف کنیم که به صورت زیر باشد:

$$dx := \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x$$

از آنجا که وقتی Δx خیلی کوچک است Δf هم خیلی کوچک است.

در اینجا می‌توان Δf را هم df در نظر گرفت و در این صورت طبیعی خواهد بود که

$$f'(x)=\frac{df}{dx}.$$

حال برویم سراغ قاعده زنجیره‌ای.

$$\frac{d\ f(g(x))}{dx}=\frac{df(g(x))}{dg(x)}\ \frac{dg(x)}{d(x)}=f'(g(x))\times g'(x)$$

این واقعاً اثبات قاعدهٔ زنجیره‌ای نیست بلکه صرفاً نشان می‌دهد قاعدهٔ زنجیره‌ای به چه معناست.

برای آنکه مشتق $(fog)(x)$ را بگیریم کافی است در مشتق f مقدار $g(x)$ را قرار دهیم و سپس حاصل را در مشتق g در نقطهٔ مورد نظر ضرب کنیم.

مثال. مشتق $(2x+3)^2$ را با قاعدهٔ زنجیره‌ای و بدون آن حساب کنید.

حل.

$$(2x+3)^2=4x^2+12x+9\xrightarrow{\frac{d}{dx}}8x+12$$

با قاعدهٔ زنجیره‌ای $\quad 2(2x+3)\times 2 = 8x+12$

مشتق $2x+3$ $\quad$ مشتق : x^2 با فرض $x=2x+3$

مثال. مشتق $\sin x^2$ را بگیرید.

حل.

$$\left(\sin x^2\right)' = \cos x^2 \times 2x$$

مثال. مشتق $\sqrt{x+\sin x}$ را بگیرید.

حل.

$$\left(\sqrt{x+\sin x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sin x}} \times (x+\sin x)' = \frac{1+\cos x}{2\sqrt{x+\sin x}}$$

از جمله قواعدی که می‌توان از روی قاعده زنجیره‌ای بدست آورد مشتق تابع معکوس f^{-1} یک تابع برحسب مشتق خود f است.

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

مشتق x: $\quad \left(f^{-1}(f(x))\right)' = f^{-1\prime}(f(x)) \times f'(x) = 1$

$$\Rightarrow f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{یا} \quad f'(x) = \frac{1}{f^{-1\prime}(y)}$$

یعنی مشتق تابع معکوس در نقطهٔ $(y\,,\,x)$ برابر معکوس مشتق خود تابع در نقطهٔ $(x\,,\,y)$ است.

مثال. نشان دهید مشتق $x^{\frac{1}{n}}$ برای $n\in N$ خواهد شد $\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

$$y=x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow x=y^{n}$$

$$x'=1=\left(y^{n}\right)'=n\,y^{n-1}y' \;\Rightarrow y'=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{ny^{n-1}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}=\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

این همان شیوهٔ قبل است منتها بطور صریح از قضیهٔ تابع معکوس استفاده نکرده‌ایم.

با قضیه قبلی که اثبات کردیم تا به حال اثبات کرده‌ایم که برای تابع $f=x^{q}$ کـه $q\in Q$ اسـت

$\left(x^{q}\right)'=q\ x^{q-1}$ زیرا هر $q=\frac{m}{n}$ خواهد بود.

مثال. مشتق $\sin^{-1}(x)$ چه می‌شود؟

حل.

$$y=sin^{-1}(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad x=sin\,y$$

$$\underbrace{x'=1=\left(sin\,y\right)'=cos\;y\;y'}_{\text{قاعده زنجیره‌ای}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{cos\;y}=\frac{1}{\sqrt{1-sin^{2}y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

تقریباً آنچه که از قواعد گفتیم تمام آن چیزهایی بود که برای محاسبات خود لازم دارید. کافی است که تمرین کنید و علی‌الخصوص از قاعدهٔ پرکاربرد زنجیره‌ای استفاده کنید تا مشتق‌گیری برایتان چیزی مشابه ضرب و تقسیم شود.

فرض کنید چند تابع داریم که همه مثلاً تابع x هستند و بین آنها رابطهٔ خاصی برقرار است.

مثلاً $f(x)=sin\left(g(x)\right)+h^2(x)$

آیا با داشتن این اطلاع می‌توان چیزی در مورد رابطه‌ای بین مشتقاتشان برقرار کرد؟

طبیعی است وقتی رابطهٔ فوق برقرار باشد رابطهٔ

$$Df(x)=Dsin\left(g(x)\right)+Dh^2(x)$$

هم برقرار است پس عملاً صرفاً با یک تقسیم بر Δx همان رابطه باید برای مشتقات هم برقرار باشد:

$$\frac{d\,f(x)}{d}=\frac{d\,sing(x)}{d\,x}+\frac{d\,h^2(x)}{dx}$$

$$f'(x)=cos\,g(x)\;g'(x)+2h(x)\;h'(x)$$

همینطور می‌توان باز از این معادله مشتق گرفت و برای مراتب بالاتر هم رابطه‌ای بدست آورد.

مثال. مشتق $ln\ (x)$ چه می‌شود؟

حل.

$$y=ln(x)\Leftrightarrow x=e^y$$

$$x'=1=(e^y)'=e^y\,y'$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}$$

می‌بینید که $\left(\ln(x)\right)=\frac{1}{x}$ است و این نشان از آن است که هر چه در تابع جلو برویم مقدار تابع کُندتر افزایش می‌یابد تا اینکه در بینهایت دیگر تغییری نمی‌یابد. گر چه در بینهایت مقدارش نیز بینهایت است.

بطور معکوس e^x بسیار سریع‌الرشد است. e^x از هر x^n سریع‌الرشـدتر اسـت. ایـن بـه چـه معناست؟ به این معناست که

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

و همچنین $ln(x)$ از هر x^n کُندتر است یعنی:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

امّا چنین حدودی را چگونه می‌توان محاسبه کرد حال که مشتق‌گیری را یاد گرفته‌ایم می‌توانیم با قاعده‌ای موسوم به قاعده هوپیتال[3] این نوع حدها را محاسبه کنیم.

این قاعده می‌گوید اگر $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to a} g(x)$ ، صفر شود آنگاه:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

همچنین اگر $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to a} g(x)$ ، $\pm\infty$ شود، آنگاه:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال. حدود $\lim_{q \to 0} \frac{Sinq}{q}$, $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}$ را با قاعده هوپیتال حساب کنید.

حل.

$$\lim_{q \to 0} \frac{Sinq}{q} = \lim_{a \to 0} \frac{Cosq}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

در مورد $\frac{x^n}{e^x}$ کافی است از صورت و مخرج n بار مشتق بگیریم آنگاه:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

در مورد $\frac{\ln x}{x}$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

---

1 *Chain rule*

2 *Differential*

3 *l'Hopital*