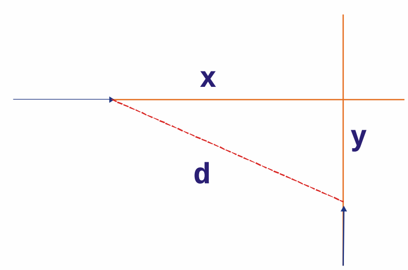
در این بخش می‌خواهیم کاربردهای مشتق و قواعدی را که برای آن بیان کرده‌ایم را ارائه دهیم.

اگر یادتان باشد مشتق را به گونه‌ای با سرعت لحظه‌ای تعریف کردیم. یعنی مشتق را آهنگ تغییرات نامیدیم. این از اساسی‌ترین کاربردهای مشتق بخصوص در مکانیک است.

آهنگهای تغییرات[1]:

مثال. دو متحرک عمود بر راستای یکدیگر در حال حرکت هستند. در لحظه‌ای فاصله آنها از تقاطع مسیرشان 3 و 4 کیلومتر است. سرعت هر کدام هم $30\ \frac{km}{h}$ است. فاصله این دو متحرک با چه آهنگی نسبت به زمان تغییر می‌کند؟



حل.

$d=\sqrt{x^2+y^2}$ یا $d^2=x^2+y^2$

طبق قواعد مشتق‌گیری

[1] Rate

$$\dot{\left(d^{2}\right)}=\dot{\left(x^{2}+y^{2}\right)} \Rightarrow 2d\dot{d}=2x\dot{x}+2y\dot{y}\,.$$

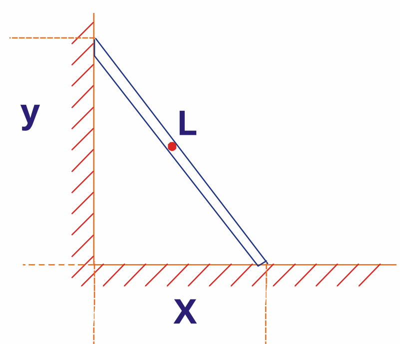
$$\Rightarrow \dot{d}=\frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{d}=\frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}$$

در مسئله ما

$$\begin{cases} x=-4\ km & \dot{x}=30\ km/h \\ y=-3\ km & \dot{y}=30\ km/h \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{d}=-\frac{4\times 30+3\times 30}{5}=\frac{-7}{5}\times 30=-42\ \ km/h$$

مثال. نردبانی به طول l به دیواری تکیه داده است. با ضربه‌ای شروع به افتادن می‌کند بگونه‌ای که دو طرف آن از زمین و دیوار جدا نشود.



هنگامی‌که نقاط اتکا آن با زمین و دیوار x و y هستند و سرعت پیشروی پایه آن روی زمین $\dot{x}$ باشد $\dot{y}$ (سرعت سر آن روی دیوار) چقدر خواهد بود؟ سرعت مرکز آن چگونه خواهد بود؟

حل.

$$l^{2}=x^{2}+y^{2} \qquad \Rightarrow 2l\dot{l}=2x\dot{x}+2y\dot{y}$$

امّا می‌دانیم که $\dot{l}=0$ است زیرا طول نردبان تغییر نمی‌یابد. پس: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=-\frac{x}{y}$

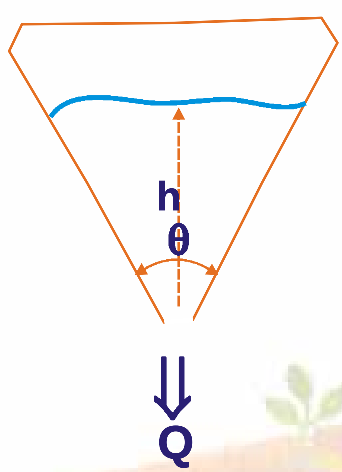
در مورد سرعت مرکز آن ابتدا مختصات مرکز را برحسب y و x می‌نویسیم آنگاه دیگر مسئله ساده می‌شود:

$$X=x/2 \quad , \quad Y=y/2 ,$$

$$\Rightarrow \dot{X}=\dot{x}/2 \qquad , \qquad \dot{Y}=\dot{y}/2=-\frac{x}{y}\,\dot{x}/2$$

$$V=\sqrt{\dot{X}^2+\dot{Y}^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\,\left|\dot{x}/2\right|=\frac{l}{2y}\left|\dot{x}\right|$$

مثال. تانکری مخروطی شکل با زاویه رأس θ داریم که از انتهای آن مایع درون آن با سرعت Q لیتر بر ثانیه خارج می‌شود. در زمانی که ارتفاع مایع در آن h است، سطح مایع با چه سرعتی در تانکر پایین می‌رود؟



حل. ابتدا حجم مایع موجود در تانکر را برحسب h و θ بدست می‌آوریم:

$$V(h)=\frac{1}{3}p\,r^2h \quad \text{که} \quad r(h)=h\tan\theta/2$$

$$=\frac{1}{3}\pi\tan\frac{\theta}{2}\,h^3$$

$$\dot{V}=\frac{\pi}{3}\tan\theta/2\;3h^2\dot{h}$$

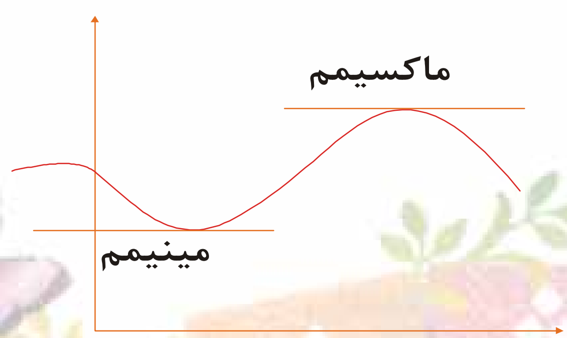
$$-Q=\dot{V}=\pi\tan\theta/2\;h^2\;\dot{h}$$

$$\Rightarrow \dot{h}=\frac{-\cot\theta/2}{\pi h^2}\,Q$$

(Q - : منفی بخاطر خروج مایع است)

مقادیر فرین تابع[2]:

مقادیر اکسترمم یا فرین همان جاهایی هستند که تابع مقدارش ماکزیمم یا مینیمم است. اگر تابع در نقاط مورد بررسی مشتق‌پذیر باشد آن وقت قطعاً در نقاط اکسترمم شیب تابع صفر است. پس برای بدست آوردن طول این نقاط کافی است مشتق تابع را مساوی صفر قرار دهیم : $f'(x_e)=0$



[2] *Extreme Values*

مثال. در مداری که باتری با نیروی محرکه e و مقاومت داخلی r به مقاومت بیرونی R متصل شـده باشد مقدار توان مصرفی توسط R از رابطهٔ:

$$P_R = I^2 R = \left(\frac{\varepsilon}{r+R}\right)^2 R$$

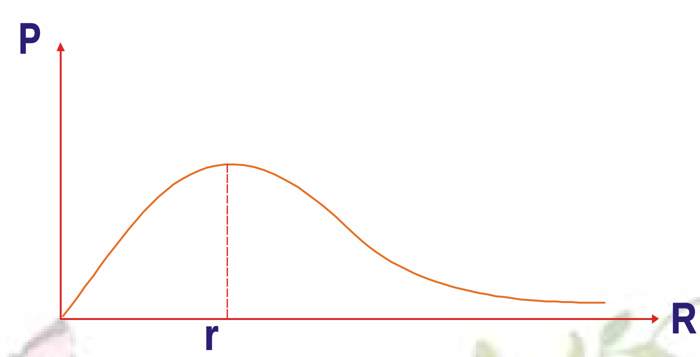
بدست می‌آید. R با r چه رابطه‌ای داشته باشد که مقدار این توان بیشینه (ماکزیمم) شود؟

حل. کافی است از $P(R)$ مشتق بگیریم و آن را مساوی صفر قرار دهیم:

$$\frac{dP}{dR} = -2\frac{\varepsilon^2}{(r+R)^3}R + \left(\frac{\varepsilon}{r+R}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2(r+R-2R)}{(r+R)^3}$$

$$\frac{dP}{dR}(R_m) = 0 \quad \Rightarrow \quad r - R_m = 0 \quad \Rightarrow \quad R_m = r$$

پس درحالتی‌که R با مقاومت درونی باتری یکی باشد بیشترین توان را R از باتری می‌کشد. اگر به نمودار P برحسب R نگاه کنید می‌بینید که این نقطه یک ماکزیمم است.

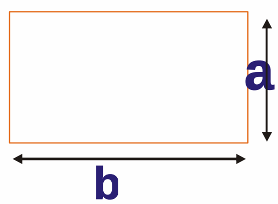


در این نقطه مقدار توان $P_m = \frac{e^2}{4r}$ می‌باشد.

بهینه سازی:

از دیگر کاربردهای مهم مشتق که نشأت گرفته‌اند از بحث قبلی (مقادیر فرین) است، بهینه‌سازی است. این که به ازای چه مقادیری کمیتی که مورد نظر ماست کمینه و یا بیشینه می‌شود.

مثال. فرض کنید مستطیلی می‌خواهیم داشته باشیم که از یک مفتول سیمی به طول ℓ ساخته می‌شود اضلاع مستطیل چه مقدارهایی را داشته باشند که سطح داخل مفتول سیمی بیشینه شود.



حل.

$$2(a+b)=\ell$$

$$S=ab$$

حال فرض کنید a , b را آنقدر تغییر دهیم تا مساحت بیشینه شود. در حالت بیشینه می‌بایست مشتق S نسبت به تغییرات هر کدام صفر شود.

$$S(a)=a\times\left(\frac{\ell}{2}-a\right)=\frac{\ell}{2}a-a^2$$

$$S'=\frac{\ell}{2}-2a=0 \quad\Rightarrow\quad a=\frac{\ell}{4} \quad\Rightarrow\quad b=\frac{\ell}{4}$$

یا

$$S(b)=\left(\frac{\lambda}{2}-b\right)b=\frac{\lambda}{2}b-b^2$$

$$\Rightarrow\ S'=\frac{\lambda}{2}-2b=0 \qquad \Rightarrow \qquad b=\frac{\lambda}{4} \qquad \Rightarrow \qquad a=\frac{\lambda}{4}$$

می‌توانستیم حتی فرض کنیم a و b در ابتدا مستقل باشند و در نهایت شــرط ثابـت بــودن طــول مفتول را روی آنها بگذاریم.

$$S(a,b) \qquad \Delta S=\Delta(ab)\overset{\text{برای } \Delta \text{ های کوچک}}{\approx}\Delta a\, b+a\,\Delta b=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{\Delta a}{\Delta b}=-\frac{a}{b}$$

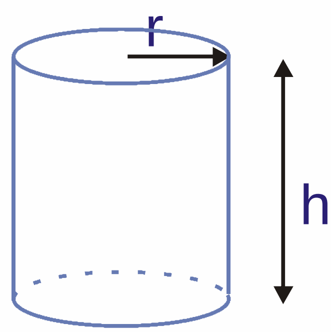
امّا:

$$2\Delta a+2\Delta b=\Delta\overset{\text{ثابت}}{\lambda}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta a=-\Delta b$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{a}{b}=-1 \qquad \Rightarrow \qquad a=b=\frac{\lambda}{4}$$

هر سه روش هم ارزند. روش آخر را بعدها بطور مفصل در بحث مشتقهای نــسبی در توابــع چنــد متغیر بسط خواهیم داد.

مثال. مقدار مشخصی ورق آلومینیومی داریم که می‌خواهیم با آن قوطی اســتوانه‌ای شــکلی (بـا دربهایش) بسازیم. ابعاد قوطی چه نسبتی با هم داشته باشند تا مقدار حجم قوطی بیشینه شود؟



حل.

$$S = \overset{\text{دو طرف قوطی}}{2\pi r^2} + \overset{\text{بدنه قوطی}}{2\pi rh}$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$V(r) = \pi r^2 \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}S - \pi r^3$$

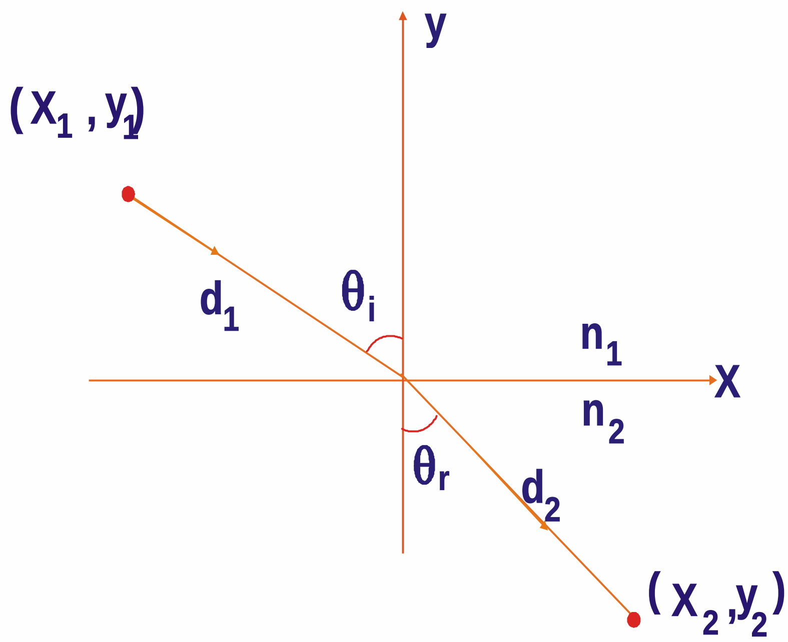
$$V' = \frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad S = 6\pi r^2$$

$$2\pi r^2 + 2\pi rh = 6\pi r^2 \qquad \Rightarrow \qquad 2r = h$$

پس اگر ارتفاع دو برابر r باشد یعنی ارتفاع و قطر استوانه یکی باشد مقدار حجم حاصل از مقدار مشخصی ورق آلومینیومی بیشینه است.

مثال. قانون اسنل _ دکارت:

قانون اسنل دکارت را در مورد شکست نور با استفاده از اصل فرما بدست آورید.



حل. اصل فرما می‌گوید که نور همواره بین دو نقطه مسیری را طی می‌کند که کمینهٔ زمان عبور را از آن بگیرد. در محیط (1) سرعت نور $V_1 = {C}/{n_1}$ و در محیط (2) سرعت نور $V_2 = {C}/{n_2}$ است. چنانچه پرتوی خروجی از نقطهٔ $(x_1 \; , \; y_1)$ در جایی به سطح مشترک بخورد که زاویه فرود q_i باشد و این پرتو با q_r خاص خود به نقطهٔ $(x_2 \; , \; y_2)$ برود می‌بایست نقطهٔ برخورد (یعنی q_i آن) بگونه‌ای باشد که مدت زمان طی شده در این مسیر از $(x_1 \; , \; y_1)$ به $(x_2 \; , \; y_2)$ کمینه شود.

$$d_1 = {y_1}/{\cos\theta_i} \qquad\qquad x_1 = -y_1 \tan\theta_i$$

$$d_2 = {-y_2}/{\cos\theta_r} \qquad\qquad x_2 = -y_2 \tan\theta_r$$

$X = x_2 - x_1$:ثابت (فاصلهٔ دو نقطه در راستای موازات فصل مشترک)

$Y = y_1 - y_2$:ثابت $\qquad y_1 \; , \; y_2$:ثابت (فاصله تا فصل مشترک)

$$X = y_1 \tan\theta_i - y_2 \tan\theta_r$$

$$t_1 = {}^{n_1 d_1}\!/_{C} \qquad t_2 = {}^{n_2 d_2}\!/_{C} \qquad t = t_1 + t_2$$

$$\begin{cases} X = y_1 \tan\theta_i - y_2 \tan\theta_r \\ \\ t = \dfrac{1}{C}\left\{\dfrac{n_1 y_1}{\cos\theta_i} - \dfrac{n_2 y_2}{\cos\theta_r}\right\} \end{cases}$$

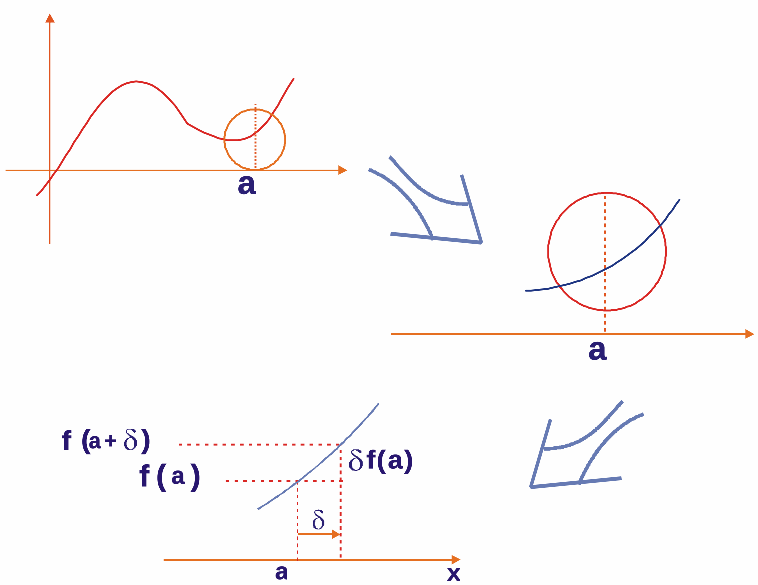
(ثابت) $X'(\theta_i) = 0 = y_1 \dfrac{1}{\cos^2\theta_i} - y_2 \dfrac{\theta'_r(\theta_i)}{\cos^2\theta_r} \Rightarrow \theta'_r(\theta_i) = \dfrac{y_1}{y_2}\dfrac{\cos^2\theta_r}{\cos^2\theta_i}$

(مینیمم کردن) $: t'(\theta_i) = 0 = \dfrac{1}{C}\left\{+\dfrac{\sin\theta_i\, n_1 y_1}{\cos^2\theta_i} - \dfrac{\sin\theta_r\, n_2 y_2}{\cos^2\theta_r}\,\theta'(\theta_i)\right\}$

$$\Rightarrow \quad \frac{n_1 \sin\theta_i\, y_1}{\cos^2\theta_i} = \frac{n_2 \sin\theta_r}{\cos^2\theta_r}\, y_2\left(\frac{y_1}{y_2}\frac{\cos^2\theta_r}{\cos^2\theta_i}\right)$$

$$\Rightarrow \quad n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r$$

تقریب خطی [3]



اگر تابع $f(x)$ را حول مثلاً نقطهٔ $x=a$ به اندازهٔ کافی بزرگ کنیم خواهید دید که شکل تابع در حول و حوش a شیب خط راستی می‌شود که شیبش، شیب خط مماس بر منحنی $f(x)$ در آن نقطه است. وقتی ما تابع را حول و حوش a یعنی برای dتاهایی حول و حوش a بررسی کنیم این بزرگنمایی به معنای آنست که اگر d را روی نمودار اولیه نظاره کنیم مقدار بسیار کوچکی را خواهیم دید که به سمت صفر نزدیک می‌شود.

در حال حاضر از روی شکل پیداست که برای $d \cong 0$

$$f\ (a+\delta) \cong f\ (a)+\delta f\ '(a)$$

شیب خط مماس

---

[3] *Linear Approximation*

به این تقریب، تقریب خطی تابع f در حول نقطهٔ a می‌گویند.

اگر دقت کرده باشید وقتی که $d \to 0$ می‌رود این رابطه بطور دقیق صحیح است. یعنی:

$$f'(a) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(a+\delta) - f(a)}{\delta}$$

کاری که ما کرده‌ایم این است که برای $d \cong 0$ (کوچک) هم این تساوی را بعنوان مقدار تقریبی صحیح در نظر گرفته‌ایم.

مثال. جذر 26 تقریباً چقدر خواهد شد؟

حل.

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(a+\delta) \cong \sqrt{a} + \frac{\delta}{2\sqrt{a}} \qquad a+\delta = 26 \begin{cases} a = 25 \\ \delta = 1 \end{cases}$$

$$f(26) \cong \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} = 5 + \frac{1}{10} = 5/1$$

اگر این مقدار را با مقدار دقیق مقایسه بکنید خواهید دید:

$$\left|26 - (5/1)^2\right| = 0/01$$

که دقت مناسبی تا دو رقم بعد از اعشار را تضمین می‌کند. (البته با گرد کردن عدد)

امّا سؤالی که مطرح می‌تواند بشود آنست که d چقدر کوچک باید باشد تا دقت مورد نظر ما را تأمین کند. به تعبیری خطای این محاسبه برحسب d تا چه مرتبه‌ای خواهد بود.

طبق قضیه مقابل این خطا را می‌توان تخمین زد:

فرض کنید مقدار تابع در نقطه x به مقدار تقریبی $f(a)+f'(a)(x-a)$ در نظر بگیــریم آنگــاه نقطه‌ای به طول X بین x و a وجود دارد که

$$\left|f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)\right|=\left|\frac{f''(X)}{2}\right|(x-a)^2 \quad (\text{خطا})$$

به بیان d خواهیم داشت

$$\text{خطا} = \left|\frac{f''(X)}{2}\right| \delta^2$$

حال اگر مقدار بیشینهٔ ممکن برای f'' را در بازهٔ x تا a در نظر بگیریم قطعاً

$$\text{خطا} \le \left|\frac{f''(X_m)}{2}\right| \delta^2 \ \text{ماکزیمم}$$

مثلاً در مثال قبلی $\quad f''(x)=-\frac{1}{4}\,\frac{1}{x\sqrt{x}}$

در فاصله 25 تا 26 مقدار بیشینه‌اش در حالت $a=25$ اتفاق می‌افتد

$$\left|f''(X)\right|=\frac{1}{100\times5}=0/002 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{26}\ \text{خطا}) \le 0/001$$

پس دقت جذر 26 که ما اعلام کردیم تا سه رقم بعد از اعشار می‌تواند باشد (البته با گرد کردن)

$$\sqrt{26}=5/100 \pm 0/001$$

این عبارت به ایــن معناســت کــه قطعــاً $5/099 \le \sqrt{26} \le 5/101$ مقــدار دقیــق تــا 5 رقــم: $\sqrt{25}=5/09902$ است که با نامساوی فوق تطابق دارد.

پس با توجه به آنچه این قضیه گفت خواهیم داشت:

$$f(a+\delta)=f(a)+f'(a)\delta+\frac{f''(X)}{2}\delta^2$$

گاهی این را به فرم مقابل می‌نویسند:

$$f\ (a+\delta)=f\ (a)+f\,'(a)\delta+O\left(\delta^2\right)$$

نماد O [4] به معنای آن است که $\mathrm{O}\left(d^2\right)\le K\,d^2$. یعنی حتماً K ثابتی وجود دارد که بـه ازای آن مقدار باقیمانده که O باشد از $K\,d^2$ کوچکتر خواهد بود.

به اصطلاح دیگر دقت تقریب فوق تا مرتبهٔ دوم است: $\mathrm{O}\left(d^2\right)$. (O می‌توانـد مخفـف *order* یـا همان مرتبه باشد) در بحث چند جمله‌ایهای تیلور حالت کلی‌تر تقریب را خواهیم دید.

چند جمله‌ایهای تیلور [5]

در بخش قبلی تابع را با یک خط حول و حوش نقطهٔ a تقریب زدیم. طبیعتاً اگر مـثلاً جـای خـط منحنی را به سهمی و یا … چند جمله‌ای درجه nام تقریب بزنیم. نتیجه بهتر و دقیق‌تر خواهد شـد. امّـا دلیل این کارها چیست؟ ممکن است مانند مثال $\sqrt{26}$ ما مقـدار تـابع را در $\sqrt{25}$ بـدانیم ولـی بـرای محاسبهٔ $\sqrt{26}$ بطور مستقیم دنبال روشی باشیم. یکی از آن روشها بسط تابع مـورد نظـر حـول نقطـهٔ مشخص است. این بسط چند جمله‌ایست زیرا ما چند جمله‌ایها را به راحتی می‌توانیم حساب کنیم. زیـرا اعمالی مانند ضرب، جمع، توان و … برروی اعداد اعشاری تعریف شده‌اند و دارای الگـوریتمی مـشخص می‌باشند.پس هدف ما چنین است:

$$f\ (a+\delta)\cong P_n\ (a\ ;\ \delta)$$

---

[4] *Big-O notation*

[5] *Taylor polynomials*

که

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} b_k\ (a)\ \delta^k$$

یعنی ما مقدار تابع را برحسب چندجمله‌ای که ضرایبش را a تعیین می‌کند مشخص می‌کنـیم. در

مورد تقریب خطی $n = 1$ بود یعنی $P_1 = b_0 + b_1\ \delta$ که $b_0 = f\ (a)\ \ ,\ b_1 = f\,'(a)$

امّا اگر چنین فرضی را بکنیم خواهیم داشت:

$$f\ (a+\delta)\Big|_{\delta=0} = P_n\ (a\ ;\ \delta)\Big|_{\delta=0} \quad \Rightarrow \quad f\ (a) = b_0$$

$$f\,'(a+\delta)\Big|_{\delta=0} = P'_n\ (a\ ;\ \delta)\Big|_{\delta=0} \quad = \quad b_1 + 2b_2\ \delta + \dots\Big|_{\delta=0} \ = b_1$$

$$\Rightarrow\ b_1 = f\,'(a)$$

$$f\,''(a+\delta)\Big|_{\delta=0}\ =\ P''_n(a\ ;\ \delta)\Big|_{\delta=0} = 2b_2 + 2\times 3b_3\ \delta + \cdots\Big|_{\delta=0} = 2b_2$$

$$\Rightarrow\ b_2 = \frac{f\,''(a)}{2}$$

و همین‌طور تا مرتبه K مشتق بگیریم $(k \le n)$ خواهیم داشت:

$$f^{\,(K)}(a) = (2\times 3\times\cdots\times K\,)\,b_K \qquad \Rightarrow \qquad b_K = \frac{f^{\,(K)}(a)}{K\,!}$$

پس چند جمله‌ای P_n تا مشتق مرتبه n اُمش منطبق بر مشتق n اُم f در نقطهٔ a $(d = 0)$ خواهد

بود. می‌ماند بحث خطای این محاسبه:

$$f\ (a+\delta) = P_n\ (a\ ;\ \delta) + E_n\ (\delta)$$

طبق قضیه‌ای مشابه حالت قبلی مقدار این خطا برابر است با:

$$E_n(\delta)=\frac{f^{(n+1)}(X)}{(n+1)!}\,\delta^{n+1}$$ (قضیهٔ تیلور[6])

که X نقطه‌ای بین a و $a+d$ است. با بیان O خواهیم داشت:

$$f\,(a+\delta)=P_n\,(a\,;\,\delta)+O\left(\delta^{n+1}\right)$$

بسط چند سری از توابع پرکاربرد به شرح زیر است:

$$(1+\delta)^r=1+r\,\delta+\frac{r(r-1)}{2}\,\delta^2+\ldots+\frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}\,\delta^n+O\left(\delta^{n+1}\right)$$

$$\ln(1+\delta)=\delta-\delta^2/2+\delta^3/3-\cdots+(-1)^{n-1}\,\frac{\delta^n}{n}+O\left(\delta^{n+1}\right)$$

$$\cos(\delta)=1-\delta^2/2!+\delta^4/4!-\cdots+(-1)^n\,\frac{\delta^{2n}}{(2n)!}+O\left(\delta^{2n+2}\right)$$

$$sin\,(\delta)=\delta-\delta^3/3!+\delta^5/5!-\cdots+(-1)^n\,\frac{\delta^{2n+1}}{(2n+1)!}+O\left(\delta^{2n+3}\right)$$

$$\tan^{-1}(\delta)=\delta-\delta^3/3+\delta^5/5-\cdots+(-1)^n\,\frac{\delta^{2n+1}}{2n+1}+O\left(\delta^{2n+3}\right)$$

$$\boldsymbol{l}^{\delta}=1+\delta+\frac{\delta^2}{2!}+\frac{\delta^3}{3!}+\cdots+\frac{\delta^n}{n!}+O\left(\delta^{n+1}\right)$$

اگر به بسط آخر یعنی بسط e^d دقت کنید، این همان بسطی است که در بخش مشتق‌گیری بـرای

تابع e^d بدست آورده بودیم. این بار منتها از طریق بسط تیلور.

$$\left(e^{\delta}\right)^{(n)}\big|_{\delta=0}=e^0=1\quad\Rightarrow\quad b_K=1/K!$$

$$\Rightarrow\quad P_n=\sum_{K=0}^{n}\frac{\delta^K}{K!}$$

---

[6] Taylor's theorem