انتگرال [1]

اگر یادتان باشد در بخشهای قبل هنگام تعریف مشتق مثال از سرعت لحظه‌ای زدیم و مشتق تابع مکان برحسب زمان را سرعت لحظه‌ای تعریف کردیم به این گونه که

$$V(t)=\frac{dx(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\dot{x}(t)$$

به نماد d، دیفرانسیل می‌گویند. دیفرانسیل یک تابع به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$df(x)=f'(x)dx$$

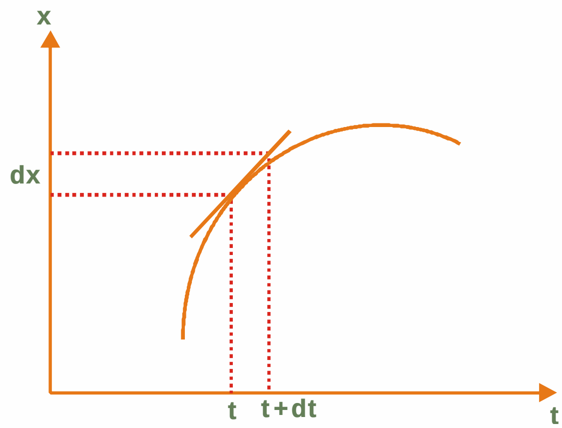
با این فرض که dx به معنای Δx وقتی $\Delta x\to 0$.

پس با این اوصاف:

$$dx=\dot{x}(t)dt=V(t)dt$$

یعنی آنکه جابجایی کوچکی که با سرعت V در لحظه t به مدت dt (که کوچک است) انجام می‌شود مقدار فوق است.

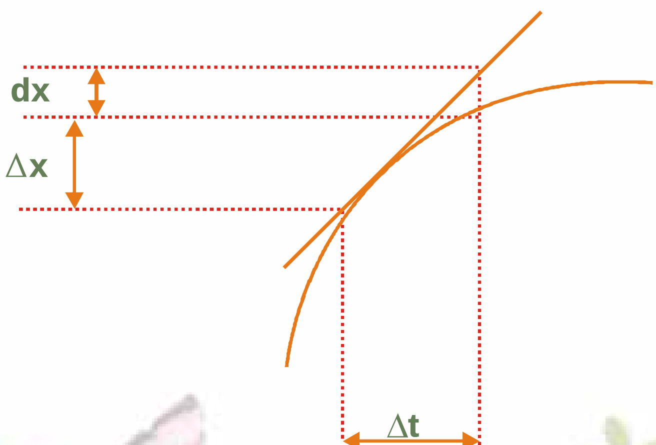
[1] Integral



اگر dt کوچک نبود این اختلاف با مقدار واقعی فاصله می‌گرفت.

از آنجا که مشتق شیب نمودار است، پیداست که $dx\ (t)$ با $\Delta x(t)$ بـرای حالتیکـه Δt کوچـک نیست متفاوت است امّا وقتی

$\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta x \to dx$



یعنی اختلاف این دو مقدار به سمت صفر می‌رود. بخاطر همین است که در تعریف مشتق می‌توان از dx به جای $Lim\Delta x$ استفاده کرد. یا به تعبیر دیگر چون مشتق مثلاً در لحظه t قابل تعریف است می‌توان dx را با Δx جابجا کرد. به بیان ریاضی:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left\{f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x\right\}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\Delta f=f'(x)\Delta x\right\}$$

امّا $df=\lim_{\Delta x\to 0}f'(x)\Delta x$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\Delta f=df\right\}$$

پس این تساوی صرفاً در حالت حدی درست است اگر $f'(x)$ وجود داشته باشد.

هدف از تمام این بحثها آنست که بگونه‌ای در محاسبات در شرایط مناسب df را جای Δf بکار ببریم.

حال فرض کنید ما در مسائلمان عوض آنکه مکان ذره را برحسب زمان داشته باشیم، سرعت آن را برحسب زمان داشته باشیم. آیا در این صورت راهی هست که مکان ذره را برحسب زمان بدست آوریم؟

فرآیندی که در این کار به ما کمک می‌کند را انتگرال‌گیری می‌گویند.

اگر حرکت را بخش، بخش کنیم و جابجایی هر بخش را بدانیم آنگاه با جمع جابجایی همه بخشها مکان را پیدا خواهیم کرد.

یعنی فرض کنید می‌دانیم که متحرک در لحظه صفر در مکان x_0 باشد. اگر ما بدانیم تـا لحظـه t چقدر جابجا شده آنگاه مکان آن را در لحظه t خواهیم داشت زیرا واضح است که:

$$x(t) = Dx + x_0$$

امّا مشکل آنست که چگونه باید Δx کل را از روی سرعت بدست آوریم. بیایید Δx را به قطعـات کوچکتر بشکنیم.

اگر به n قطعه آن را بشکنیم آنگاه

$$Dx = \sum_{i=1}^{n} Dx_i$$

امّا همچنان مشکلمان باقی است. حال کافی است آنقدر قطعات را کوچک کنیم که بحثهای قبلی بدرد بخورد یعنی: $\lim_{Dt_i \to 0} \left(Dx_i = dx(t_i)\right)$ از آنجا که هر بازه دارای زمانی معادل است (Δt_i) کوچـک کرده Δx_i به معنای کوچک کردن Δt_iاست. $dx(t_i)$ به معنای dx است که از زمان t_i که ابتـدای بـازه را مشخص می‌کند سنجیده شده باشد.

حال خواهیم داشت:

$$Dx = \lim_{\substack{Dx_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} Dx_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \lim_{Dx_i \to 0} Dx_i$$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} = dx(t_i)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} dx(t_i)$$

علت آنکه n به سمت بینهایت می‌رود آنست که بازه‌هایمان به سمت صفر می‌روند. به نماد رایج ریاضی رابطه فوق را به صورت زیر می‌نویسند:

$$Dx = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}} dx\,(t_i)$$

$$= \int_{x_0}^{x} dx = x - x_0$$

توجه کنید که جای حدود $i=1$, $i=n$, $x(t_1)=x_0$, $x(t_n)=x$ نشسته است که همان موقعیت در لحظه صفر $(t_1=0)$ و لحظه نهایی $(t_n=t)$ هستند.

امّا می‌دانیم که $dx = \dot{x}dt$ یا همان $dx = Vdt$

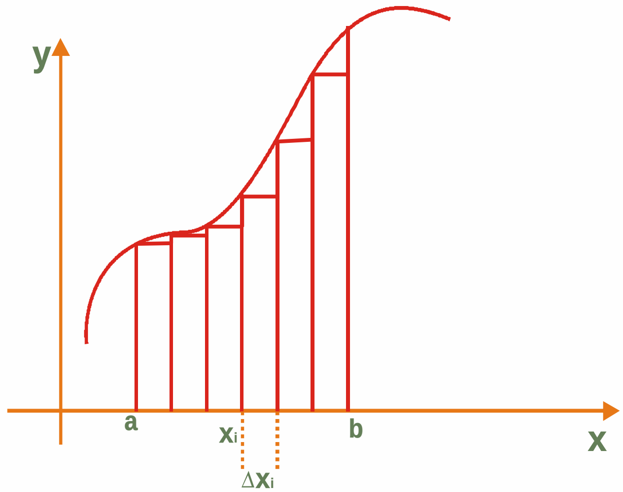
$$\Rightarrow \Delta x = \int_0^t V(t)dt$$

می‌بینید وقتی دیفرانسیل ما از dx به dt تغییر یافت حدود هم برحسب زمان بیان شدند. پس حالا دیگر مفهوم انتگرال را می‌دانید. یعنی آنکه بطور پیوسته روی یکسری اجزاء بسیار کوچک جمع بزنیم تا تغییرات کل آن را بدست آوریم.

مثال. مساحت زیر نمودار $f(x)$ را نسبت به محور x در فاصله $x=a$ تا $x=b$ برحسب انتگرال بنویسید.

حل. برای محاسبه مساحت چه می‌شود کرد؟

یک کار ساده آنست که x را در فاصله a تا b به n قسمت تقسیم کنیم و آنگاه جمع مساحتهای مستطیلهایی که هر تکه ایجاد می‌کند را حساب کنیم. اگر $n \to \infty$ برود قطعاً مقدار جمع حاصل همان مساحت زیر نمودار خواهد شد.



به بیان دیگر خواهیم داشت:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b$$

که این کار فاصله a تا b را به n بازه تبدیل می‌کند. $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$

و مساحت برحسب جمع مساحت مستطیلها خواهد شد.

$\Delta S_i = f(x_i)\Delta x_i$ مساحت مستطیل iاُم

ارتفاع مستطیل   عرض مستطیل

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} DS_i$$

که چون $DS_i = f(x_i)Dx_i \; , \; Dx_i \to 0 \; , \; DS_i \to 0$

$$\Rightarrow \Delta S_i = ds(x_i) = f(x_i)dx$$

$$\Rightarrow S = \int_{x_0}^{x_n} ds = \int_a^b f(x)dx$$

اگر یادتان باشد برای حرکت داشتیم:

$$V=\frac{dx}{dt}\Leftrightarrow x=x_0+\int_0^t V(t)dt$$

یعنی برای محاسبه $\int_0^t V(t)dt$ کافی است تابعی مانند $x(t)$ پیدا کنیم که

$$V(t)=\frac{dx}{dt}$$

آنگاه $\int_0^t V(t)dt=x-x_0$

به بیان دیگر اگر می‌خواهیم انتگرال $f(x)$ را در بازه a تا b بگیریم باید تابعی مانند $F(x)$ پیدا کنیم که $f'(x)=F(x)$ آنگاه:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

به این رابطه قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌گویند. به F تابع اولیه f می‌گویند. f را هم انتگرال ده می‌خوانند.

در اصل این به نوعی می‌تواند تعریف انتگرال باشد به این معنا که انتگرال‌گیری را می‌توان معادل با پیدا کردن تابع اولیه دانست آنوقت قضیه اساسی این را می‌گوید که مساحت زیر نمودار $f(x)$ حتماً انتگرال آنست. یعنی اغلب مسئله اینست که ما محاسباتمان را به فرم انتگرال بیان کنیم، آنگاه مشکل با انتگرال‌گیری حل می‌شود. انتگرال‌گیری عملاً همان پاد مشتق‌گیری است یعنی انجام عملی معکوس مشتق‌گیری.

امّا آیا تابع اولیه یکتاست؟ به این سؤال بعد از مثال زیر پاسخ می‌دهیم:

مثال. مساحت زیر سهمی $y=x^2$ از 0 تا 2 چقدر است؟

حل.

$$\int_{0}^{2} x^2 dx = F(2) - F(0)$$

امّا F چه می‌تواند باشد؟ از آنجا که می‌دانیم $\frac{dx^3}{dx} = 3x^2$ پس F باید:

$$F = \frac{x^3}{3} \Rightarrow \int_{0}^{2} x^2 dx = \frac{2^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{8}{3}$$

F را می‌شد $F = \frac{x^3}{3} + 5$ هم گرفت زیرا این تابع هم مشتقش x^2 می‌شود پس:

$$\int_{0}^{2} x^2 dx = (\frac{2^3}{3} + 5) - (\frac{0^3}{3} + 5) = \frac{8}{3}$$

می‌بینید که در مثال فوق دو تابع اولیه گرفتیم که مشتقش x^2 می‌شد ولـی نتیجـه محاسـبه در هـر دو حالت یکی شد. این اتفاقی نیست زیرا:

فرض کنید F_1 تابع اولیه باشد:

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = F_1(b) - F_1(a)$$

فرض کنید F_2 تابع اولیه باشد:

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = F_2(b) - F_2(a)$$

امّا می‌دانیم که هر دو تابع دارای خاصیت زیر هستند:

$$f(x) = \frac{dF_1}{dx} = \frac{dF_2}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d(F_1 - F_2)}{dx} = 0$$

امّا می‌دانیم صرفاً تابع ثابت است

که مشتقش صفر می‌شود پس:

$$F_1 - F_2 = C$$

یعنی تفاوت هر دو تابع اولیه صرفاً یک مقدار ثابت در تمام x هاست این به ما چه خواهد داد؟

$$F_1(b) - F_1(a) = (F_2(b) + C) - (F_2(a) + C) = F_2(b) - F_2(a) + C - C = F_2(b) - F_2(a)$$

نتیجه آنکه هر چیزی که بعنوان تابع اولیه انتگرال ده انتخاب شود مقدار انتگرال یکسان خواهد شد.

عمل پاد مشتق‌گیری یعنی پیدا کردن تابع اولیه را به فرم زیر نمایش می‌دهند:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

به این انتگرال نامعین[2] می‌گویند. حاصل آن مجموعه تمام تابع اولیه‌های f است.

از این به بعد هرگاه از اصطلاح انتگرال‌گیری استفاده کردیم منظور انتگرال نامعین‌گیری است.

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx \Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b$$

این نوع دیگر نمایش انتگرال معین[3] است. انتگرال با مقدار مشخص و با حدود معلوم b, a را انتگرال معین می‌گویند.

مثال. انتگرال x^r چه می‌شود؟

---

[2] *Indefinite*

[3] *definite*

حل. باید دنبال تابعی بگردیم که مشتقش x^r شود. می‌دانیم مشتق x^s, sx^{s-1} خواهد بود. پس

کافی است $s = rH$ و یک ضریب $\frac{1}{s}=\frac{1}{r+1}$ هم برای حذف s روبروی x^{s-1}

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}+C \qquad r \neq -1$$

که واضح است اگر $r=-1$ باشد مقدار نامعین خواهد بود.

اولین سؤالی که اینجا با آن مواجه می‌شویم آنست که $\int \frac{1}{x}dx$ چه خواهد بود یعنی چه چیزی

مشتقش $\frac{1}{x}$ خواهد شد؟

بیایید تابعی به فرم مقابل تعریف کنیم:

$$F(x) := \int_1^x \frac{dx'}{x'}$$

این به آن معناست که تابع $F(x)$ انتگرال معین تابع $\frac{1}{x'}$ است از **1** تا x. طبیعی است که به ازای

هر x یک مقدار برای انتگرال وجود خواهد داشت (که همان مساحت زیر نمودار $\frac{1}{x'}$ از **1** تا x است) پس

قطعاً $F(x)$ یک تابع با دامنه $[1,\infty)$ خواهد بود.

در کل اگر تابعی مانند F را به فرم زیر تعریف کنیم.

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

این تابع قطعاً تابع اولیه $f(x)$ خواهد بود:

که G یک تابع اولیه f است.

$$\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$$

$$\Rightarrow F(x)=G(x)-G(a)$$

که چون $G(a)$ ثابت است:

$$\frac{dF}{dx}=\frac{dG}{dx}=f(x)$$

پس قطعاً:

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{1}{x}$$

امّا ببینیم $F(x)$ چه خواصی دارد تا شاید بتوانیم حدسش بزنیم. مثلاً ببینیم $F(ax)$ چه می‌شود؟

برای اینکه بتوانیم نتایج خوبی بدست بیاوریم نیاز به چند گزاره و قضیه کلی در مورد انتگرال داریم.

(1) $\int (f+g)\,dx=\int f dx+\int g dx$

بدیهی است که

$$\frac{dG}{dx}=g \quad , \quad \frac{dF}{dx}=f$$

$$\Rightarrow \frac{d(G+F)}{dx}=g+f$$

پس جمع G,F تابع اولیه $f+g$ خواهد بود.

(2) $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$

برهان.

$$\frac{dF}{dx}=f(x)\Rightarrow \frac{daF}{dx}=a\frac{dF}{dx}=af(x)$$

(3) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

برهان. $F(b)-F(a)=-\left(F(a)-F(b)\right)$

(4) $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$

برهان. $F(b)-F(a)+F(c)-F(b)=F(c)-F(a)$

امّا آیا مانند مشتق خواصی برای f/g یا $f\times g$ یا fog می‌توانیم پیدا کنیم؟ انتگرال‌گیری کار به مراتب مشکلتری از مشتق‌گیری است زیرا الگوریتم مشخصی برای حدس انتگرال نداریم. در حالت کلی برای ترکیبهای بیان شده خواصی وجود ندارد ولی برای حالتهای خاص می‌توان چیزهایی گفت.

اگر قضیه مشتق زنجیره‌ای یادتان باشد:

$$\frac{dF(g(x))}{dx}=\frac{dF(g(x))}{dg(x)}\ \frac{dg(x)}{dx}$$

یا به فرم ساده‌تر

$$\frac{dF(g)}{dx}=\frac{dF(g)}{dg}g'(x)$$

$$\Rightarrow dF(g)=\frac{dF(g)}{dg}g'(x)dx$$

$$\Rightarrow F(g)=\int dF(g)=\int\frac{dF(g)}{dg}g'(x)dx$$

این قضیه به فرم انتگرالی می‌گوید که فرض کنید می‌خواهیم انتگرال $\int h(x)g'(x)dx$ را حساب کنیم چنانچه $h(x)=P(g(x))$ بتوانیم بنویسیم آنگاه

$$\int h(x)g'(x)dx=\int P(g)g'dx=\int P(g)dg \text{ ؛} P(g)=\frac{dF(g)}{dg}$$

یعنی انتگرال ما با یک تغییر متغیر از x به $g(x)$ تبدیل می‌شود منتها صرفاً بر روی بخش $h(x)=P(g)$ نه کل آن.

مثال. انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+3)}} \text{ ؛} \qquad \int \sin x dx \text{ ؛} \qquad \int \cos x dx \text{ ؛} \qquad \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

حل. می‌دانیم که $\int u^r du=\frac{u^{r+1}}{r+1}+C$

حال باید ببینیم چگونه باید تغییر متغیر دهیم:

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}}=u^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow u=x+3$$

($u'(x)=1$ زیرا) $\qquad du=dx$

$$\Rightarrow\int\frac{1}{\sqrt{x+3}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{u}}du=\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=2u^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{x+3}+C$$

$$\int \sin x dx=-\cos x+C$$

$$\int \cos x dx=\sin x+C$$

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx\,;\; u=1-x^2\Rightarrow du=-2xdx$$

$$=\int -\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=-\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=-u^{\frac{1}{2}}+C=-\sqrt{1-x^2}+C$$

ملاحظه می‌کنید که قاعده زنجیره‌ای در مشتق نحوه تغییر متغیر را در انتگرال به ما می‌دهد یعنی اگر ما بخشی از تابع را $g'(x)$ بنامیم بطوریکه:

$$f(x)=h(x)g'(x)$$

آنگاه: $\int f(x)\,dx=\int h(x)\underbrace{g'(x)dx}_{dg}=\int h(x)dg=\int P(g)dg$ **که** $h(x)=P(g(x))$

یعنی برای تغییر متغیر حتماً باید جزئی را پیدا کرد که انتگرالش ساده و مشخص باشد (g') به بیان دیگر:

$$f(x)=h(x)\,h(x)$$

$$\int f(x)dx=\int h(x)\,h(x)\,dx$$

امّا اگر بدانیم $h(x)=g'(x)$ **یعنی:** $g=\int h\,dx$

آنگاه $\int f(x)dx=\int h(x)dg=\int h(x)d\left(\int h(x)dx\right)$

امّا حدود انتگرال معین در این حالتها چه تغییری خواهد کرد؟

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx=\int_{u=c}^{u=d} K(u)\,du$$

اگر:

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x);\frac{dK(u)}{du}=K(u)$$

$$\Rightarrow F(b)-F(a)=K(d)-K(c)$$

$$\frac{dK(u(x))}{dx}=f(x)=\frac{dF(x)}{dx}\Rightarrow\frac{d\left(F(x)-K(u(x))\right)}{dx}=0$$

$$\Rightarrow F(x)=K(u(x))+C$$

$$\Rightarrow d=u(b);\ c=u(a)$$

پس

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} K(u)du$$

که $f(x)dx=K(u)du$ و $u=u(x)$

در اصل معنای تغییر متغیر در عبارت آخر پیداست مقصود ما از انتگرال I بود:

$$I=Lim\sum dI=Lim\sum f(x)dx=Lim\sum K(u)du$$

یعنی اگر $dI=f(x)dx$ حال x را به $u(x)$ تبدیل کنیم و تابعی بیابیم که همان dI را به ما بدهد یعنی

$$dI=f(x)\ dx=K(u)\ du$$

این تساوی به ما می‌گوید:

$$f(x)dx=K(u)du$$

$$\Rightarrow f(x)=K(u)\frac{du}{dx}=h(x)h(x)$$

که $h(x)=K(u(x))\ ,\ h(x)=\frac{du(x)}{dx}$

به هر صورت در این روش باید تابعی مانند $h(x)$ از f بیرون بکشیم که انتگـرالش (u) ســاده و مشخص باشد و همچنین بتوان باقیمانده f را (h) برحسب آن بخوبی نوشت $(h=K(u))$ و البته در نهایت گرفتن انتگرال $\int K(u)du$ ساده‌تر باشد.

برگردیم سر مسئله‌ای که بخاطرش این بحثها را شروع کردیم:

$$F(x):=\int_1^x \frac{dt}{t}$$

$$F(ax)=\int_1^{ax}\frac{dt}{t}=\int_1^{a}\frac{dt}{t}+\int_a^{ax}\frac{dt}{t}=F(a)+\int_a^{ax}\frac{a}{a}\frac{dt}{t}=F(a)+\int_{t=a}^{t=ax}\frac{d\left(t/a\right)}{t/a}$$

حال $u=\dfrac{t}{a}$

$$\Rightarrow F(ax)=F(a)+\int_{u=1}^{u=x}\frac{du}{u}=F(a)+F(x)$$

خاصیت جالبی است. فرض کنید عددی مانند h باشد که $F(h)=1$

یعنی $\int_1^h \frac{dt}{t}=1$ آنگاه $F(hx)=1+F(x)$

حال به تابع زیر توجه کنید:

$$h(y)=h^y$$

$$hh(y)=hh^y=h^{y+1}$$

می‌دانیم که تابع معکوس $h(y)$ همان $\log_h$ است یعنی:

$$h(y)=h^y=x\Leftrightarrow y=\log_h(x)\qquad x>0$$

حال اگر $F(x)=\log_h(x)$ در نظر بگیریم بدیهی است که خاصیت فوق برقرار است:

$$F(ax)=\log_h(ax)=\log_h a+\log_h x$$

امّا h آن عددی است که $\int_1^h \frac{dt}{t}=1$.

پس تابع مورد ما یک تابع لگاریتمی است. امّا ببینیم h یعنی مبنای آن چه عددی است. برای اینکار مستقیم از $F(x)$ مشتق می‌گیریم.

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{d\log_h x}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_h(x+h)-\log_h(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\log_h\left((1+h/x)^{\frac{1}{h}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\log_h(x)}{dx}=\lim_{N\to\infty}\log_h(1+\frac{1}{Nx})^{\frac{Nx}{x}}$$

امّا می‌دانیم که $\lim_{N\to\infty}(1+\frac{1}{Nx})^{Nx}=e$

$$\Rightarrow \frac{d\log_h(x)}{dx}=\log_h e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$$

تنها راه تساوی سمت راست آن است که $h=e$ باشد پس لگاریتم مورد نظر همان لگاریتم نپری است.

$$\frac{d\ lnx}{dx}=\frac{1}{x} \qquad \text{یا} \qquad lnx=\int_1^x \frac{1}{x'}dx' \qquad x>0$$

به تابع $ln|x|$ توجه کنید

$$\frac{dln|x|}{dx}=\begin{cases} x>0\Rightarrow \frac{d}{dx}lnx=\frac{1}{x} \\ x<0\Rightarrow \frac{d}{dx}ln(-x)=-\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d\ln|x|}{dx} = \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$

پس در حالت کلی‌تر به ازای همه xها (بغیر صفر)

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

اگر ما تعریف

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \qquad x > 0$$

به عنوان تعریف $\ln$ بپذیر می‌توان تابع معکوس آن را بعنــوان تعریــف e^x ارائــه دهــیم یعنــی

مقدار e^x برابر است با آن y که $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y) = \int_1^y \frac{dt}{t}$ در این صورت مشتق e^x از قـضیه

تابع معکوس بدست خواهد آمد:

$$y = f(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{f^{-1'}(y)}$$

$$y = e^x \qquad (e^x)' = \frac{1}{\ln' y} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

مثال. بسط تیلور $\ln(1+x)$ را حول صفر بدست آورید.

$$\ln(1+x) = \int_1^{1+x} \frac{dt}{t} = \int_{u=0}^{u=x} \frac{du}{u+1} \quad \text{که} \quad u = t-1$$

$$= \int_0^x \sum_{i=0}^{\infty} \left((-)^i u^i \right) du$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (-)^i \int_0^x u^i \, du$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (-)^i \left. \frac{u^{i+1}}{i+1} \right|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$