کاربردهای انتگرال

در دو بخش گذشته با مفهوم انتگرال و شیوه‌های گرفتن آن آشنا شدید. حال موقع آن است که از ابزار ریاضی استفاده کنیم. اگر یادتان باشد گفتیم فرض کنید می‌خواهیم جمع زیر را حساب کنیم:

$$S = \lim_{Dx \to 0} \sum_{x=x_1}^{x_2} f(x) Dx$$

فرض کنید بدانیم که تابعی مانند $F(x)$ وجود دارد که $f(x) = F'(x)$ آنگاه

$$f(x) \lim_{Dx \to 0} Dx = f(x) dx = F'(x) dx$$

و از تعریف مشتق خواهیم داشت:

$$F'(x) dx = dF = \lim_{Dx \to 0} DF$$

پس

$$\Rightarrow S = \sum_{x=x_1}^{x_2} \lim_{Dx \to 0} DF$$

(Lim در سیگما چندان مهم نیست.)

که به معنای جمع همه تغییرات اتفاق افتاده در F است از x_1 (اولیه) تا x_2 (نهایی) که قطعاً خواهد بود:

$$S = \Delta F_{\text{کل}} = F(x_2) - F(x_1)$$

پس:

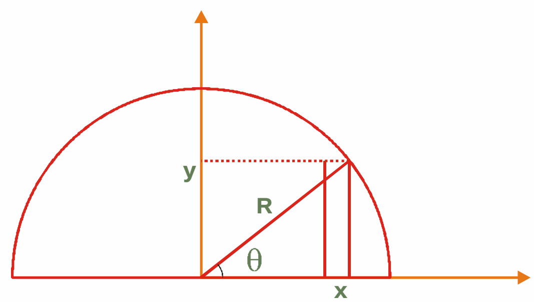
$$S = \sum_{x=x_1}^{x_2} f(x) \lim_{Dx \to 0} Dx = F(x_2) - F(x_1)$$

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = F(x_2) - F(x_1) \;;\; f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

در مسائلمان ما باید بتوانیم محاسباتمان به فرم انتگرال در بیاوریم. مثال ساده آن مساحت زیـر نمـودار تابع $f(x)$ است.

مثال. مساحت دایره را با انتگرال بنویسید و بدست آورید.

حل.



مساحت دایره در برابر نیمدایره است. می‌دانیم معادله دایره: $y^2 + x^2 = R^2$

برای نیمه بالایی: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$

مساحت برابر است با: $\frac{S}{2} = \sum_{x=-R}^{R} y(x) \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$

یعنی جمع مساحت تمام مستطیلهایی به قاعده Δx و ارتفاع $y(x)$.

به فرم انتگرالی خواهد شد:

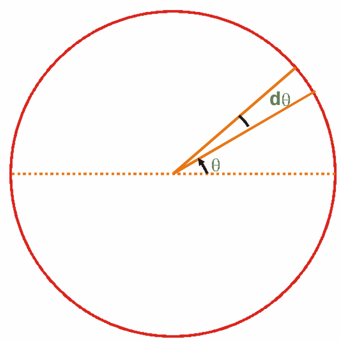
دو نیمدایره

$$S = 2\int_{-R}^{R} y(x)dx = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx$$

برای محاسبه این انتگرال باید از روش جانشینی مثلثاتی استفاده کنیم. امّا ببینیم می‌توانیم این مساحت را بگونه دیگری بنویسیم.

اگر بخواهیم مساحت را برحسب زاویه بنویسیم نتیجه ساده‌تر خواهد بود.

اگر دایره را قطاع قطاع کنیم آنگاه



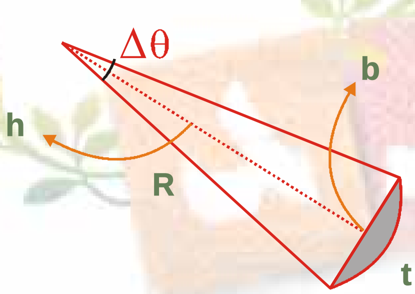
Δs: مساحت هر قطاع

$$S=\sum \Delta s=\sum \lim \Delta s$$

خوبی حالت حدی آن است که محاسبات امکانپذیر می‌شود زیرا، مطابق شکل مساحت هر قطاع به زاویه رأس Δq برابر است با:

$$\Delta s=\frac{hb}{2}+\Delta\Delta s$$

که $\Delta\Delta s$ مساحت قسمت هاشور خورده است.



در موقع حدگیری:

$$\lim_{Dq\to 0} \Rightarrow h\to R\ ,\ b\to t\ ,\ Dq\to dq$$

امّا t طول کمان دایره مقابل زاویه Δq است یعنی

$$t = DqR$$

$$\Rightarrow \lim Ds = \frac{1}{2}R\left(Rdq\right)+\lim DDs$$

واضح است که $\frac{\lim \Delta\Delta s}{\lim \Delta s}=0$ یعنی اختلاف نسبت به مساحت به صفر می‌رود پس:

$$\lim \Delta s = ds = R^2 dq \Rightarrow S=\sum \lim \Delta s=\int_{q=0}^{q=2p} ds=\frac{1}{2}\int_0^{2p} R^2 dq=\frac{R^2}{2}\left(2p-0\right)=pR^2$$

که p همان عددی است که محیط دایره برابر $2R$ برابر آنست و ما حالا رابطه آن را بـا مــساحت دایــره بدست آوریم.

اگر بخواهیم از روش قبلی استفاده می‌کردیم:

$$S=2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

$$x=R\ \cos q \quad q\in\left[0,p\right]\ ; \qquad q\left(-R\right)=p\ ,\ q\left(R\right)=0$$

$$dx=-R\ \sin q\ dq$$

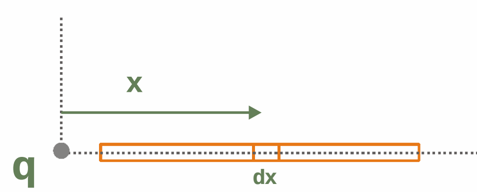
$$\Rightarrow S=2(-\int_p^0 R^2\left|\sin q\right|\sin q\ dq)=2R^2\int_0^p \sin^2 q\ dq \qquad \left(\sin q\geq 0\right)$$

$$= 2R^2\int_o^p \frac{1-\cos 2q}{2}dq = R^2\left[q - \frac{\sin 2q}{2}\right]_0^p = pR^2 + 0 = pR^2$$

که همان نتیجه قبلی است.

مثال. می‌دانیم که طبق قانون کولن در الکتریسیته ساکن، دو بار q_2, q_1 اگر در فاصله x از یکدیگر باشد نیروی $F(x) = k\frac{q_1 q_2}{x^2}$ را بر هم وارد می‌کنند. فرض کنید میله‌ای به طول L داریم که بار Q بطور یکنواخت روی آن توزیع شده است. بار نقطه‌ای q را در امتداد آن به فاصله d از سر آن قرار می‌دهیم q به میله چه نیرویی وارد می‌کند؟

حل. این یک مثال کاملاً کاربردی در فیزیک از انتگرال است. کافی است که میله را قطعه قطعه کنیم و آنقدر قطعات را کوچک کنیم که مانند بار نقطه‌ای شوند.



اگر قطعه dx دارای بار dQ باشد آنگاه dF نیروی بین این تکه و بار نقطه‌ای q خواهد بود.

$$dF = k\frac{q\,dQ(x)}{x^2}$$

که x فاصله dQ از q است. علت آنکه این نیرو را dF گذاشتیم بخاطر آن است که نیروی کل برابر جمع تمام این نیروهاست یعنی:

$$F=\int_{\text{اول میله}}^{\text{آخر میله}} dF=\int_{x=d}^{x=d+L} kq\frac{dQ(x)}{x^2}$$

از آنجا که چگالی میله یکنواخت است.

$$\frac{dQ}{dx}=\frac{Q}{L}\Rightarrow dQ=\frac{Q}{L}dx$$

$$\Rightarrow F=\int_{d}^{d+L}\frac{kqQ}{L}\frac{dx}{x^2}=\frac{kqQ}{L}\left[-\frac{1}{x}\right]_{d}^{d+L}=\frac{kqQ}{L}\left(\frac{L}{d(d+L)}\right)=\frac{kqQ}{d(d+L)}$$

جالب آن است که اگر $L\to 0$ برود یعنی میله به نقطه تبدیل شود نیروی یک بار نقطه بدست خواهد آمد.

در مثال گذشته برای اولین بار یک چیز نه چندان بدیهی را به فرم انتگرال در آوردیم و با استفاده از قضیه اساسی انتگرال را حساب کردیم. آنچه مهم است آنست که بتوانیم جمعهای مناسبی بنویسیم و مسئله را به انتگرال تبدیل کنیم.

مثال. اگر جسمی با دمای اولیه T_i در محیطی با دمای T_0 قرار گیرد طبیعتاً برای آنکه به دمای محیط برسد سردتر $(T_i>T_0)$ یا گرمتر می‌شود $(T_i<T_0)$ بدون آنکه دمای محیط چندان تغییر کند. امّا آهنگ این تغییر دما طبق قانون تجربی بفرم زیر است:

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-T_0)\qquad (k>0)$$

یعنی اگر در لحظه‌ای دمای آن $T(t)$ باشد آهنگ تغییر دمای آن $\frac{dT}{dt}$ متناسب است با منفی اختلاف دمای آن با محیط. از نظر شهودی پیداست که $T>T_0$ آنوقت $\frac{dT}{dt}<0$ یعنی با زمان دما می‌خواهد کم شود و وقتی $T<T_0$ آنوقت $\frac{dT}{dt}>0$ یعنی با زمان دما می‌خواهد زیاد شود. پس این

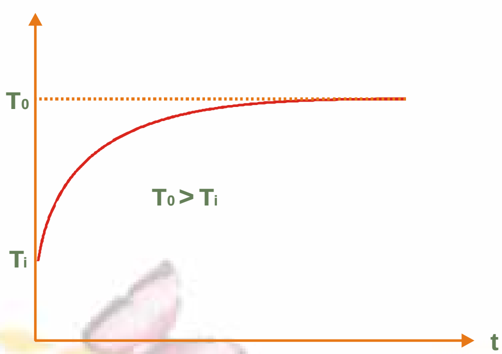
معادله می‌توان مدل خوبی برای بر همکنش جسم ما با محیط از نظر تبادل گرمایی بدون عوامل خارجی دیگر باشد.

حال T را برحسب زمان بدست آورید با فرض آنکه در ابتدا $T(0)=T_i$.

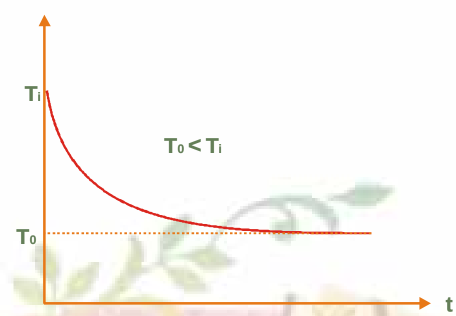
حل. قبل از آن به معادله نگاهی دیگر بیندازیم اگر $T=T_0$ در زمانی بشود آنوقت $\frac{dT}{dt}=0$ یعنی از آن به بعد دیگر دما تغییر نخواهد کرد. پس اگر وقتی به T_0 برسد دیگر در تعادل دمایی (طبق معادله) خواهد رسید که این هم با تجارب ما همخوانی دارد.

امّا زمانی که $T \neq T_0$ طبق معادله و بحثی که شد T همواره با یک نوا (علامت شیب) به سمت T_0 می‌رود یعنی اگر $T<T_0$ همواره به سمت T_0 افزایش می‌یابد یا آنکه $T_0<T$ همواره به سمت T_0 کاهش می‌یابد تا در زمان تعادل این دو برابر شوند و بمانند.

از معادله چیز دیگری که پیداست آن است که برای اختلاف دماهای بیشتر مقدار اندازه شیب بیشتر است تا آنکه در حالت تعادل صفر می‌شود. پس نمودارهای نوعی مسئله ما باید بفرم زیر باشند.



$(T_0>T_i)$



$(T_0<T_i)$

حال معادله را چگونه حل کنیم:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0) \Rightarrow dT = -k(T - T_0)dt$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T - T_0} = -kdt$$

$$\Rightarrow \int_{T_i}^{T} \frac{dT}{T - T_0} = \int_{0}^{t} -kdt$$

می‌دانیم انتگرال سمت چپ ln خواهد بود.

$$\Rightarrow ln\left|T - T_0\right|\Big]_{T_i}^{T} = -kt$$

$$\Rightarrow ln\left|T - T_0\right| - ln\left|T_i - T_0\right| = -kt$$

$$\Rightarrow ln\left|\frac{T - T_0}{T_i - T_0}\right| = -kt$$

از بحثهایی که شد پیداست که

$$\left.\begin{aligned} T_i > T_0 \Rightarrow T > T_0 \\ T_i < T_0 \Rightarrow T < T_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{T - T_0}{T_i - T_0} > 0$$

پس از آنجا که تابع معکوس ln , e است:

$$\left(\frac{T - T_0}{T_i - T_0}\right) = e^{-kt}$$

$$\Rightarrow T(t) = T_0 + (T_i - T_0)e^{-kt}$$

اگر به جواب دقت کنید می‌بینید که برای لحظه صفر:

$$T(0) = T_0 + (T_i - T_0)e^{-k_0} = T_0 + T_i - T_0 = T_i$$

امّا زمان تعادل چه وقتی است؟

از آنجا که $k>0$ است وقتی $T=T_0$ می‌شود که e^{-kt} صفر شود یعنی $t\to\infty$. یعنی زمانهای خیلی دور. (در اصل هیچ وقت)

اگر بخواهیم بدانیم در زمان t بطور نسبی چقدر T به T_0 نزدیک شده رابطه زیر مناسب است:

$$\frac{T-T_0}{T_i-T_0}=e^{-kt}$$

حال اگر زمان t را اینگونه تعریف کنیم:

$$t=\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{T-T_0}{T_i-T_0}=e^{-t/t}$$

t زمانی است که اگر سپری شود مقدار نسبت فوق

$$e^{-t/t}=e^{-1}\approx 0/368$$

خواهد شد. پس یک راه اندازه‌گیری k، اندازه‌گیری t یعنی مدت زمانی است که فاصله دما تا دمای تعادل نسبت به فاصله اولیه‌اش، e^{-1} باشد.

مثال. طبق رابطه نیوتن $\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m}$ که m جرم و F نیروی وارد بر جسم است. فرض کنید جسمی با سرعت اولیه v_0 در محیطی وارد شود که به آن مقاومت اصطکاکی $F=-kv^2$ وارد شود. سرعت و مکان آن را برحسب زمان بدست آورید. $(x(0)=0)$

حل.

$$a=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{F}{m}=-\frac{k}{m}v^2$$

بدیهی است که حالت نهایی $v=0$ خواهد بود یعنی اصطکاک جسم را متوقف می‌کند.

$$\Rightarrow \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}dt \quad \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt$$

$$\left[-\frac{1}{v}\right]_{v_0}^{v} = -\frac{k}{m}t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v_0} + \frac{k}{m}t = \frac{1}{v}$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{1}{\frac{1}{v_0} + \frac{k}{m}t} = \frac{v_0}{1+\frac{k}{m}v_0 t}$$

این بار همان زمان رسیدن به سرعتی ثابت $(v=0)$ یعنی حالت تعادل بینهایت است. امّـا بـرای مکـان خواهیم داشت:

$$\frac{dx}{dt} = v(t)$$

$$\Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t \frac{v_0}{1+\frac{k}{m}v_0 t}\,dt = \frac{m}{k}\int_0^t \frac{dt}{\frac{m}{kv_0}+t} = \frac{m}{k} ln\left|\frac{m}{kv_0}+t\right|\Bigg]_0^t$$

$$= \frac{m}{k} ln\left(1+\frac{k}{m}v_0 t\right)$$

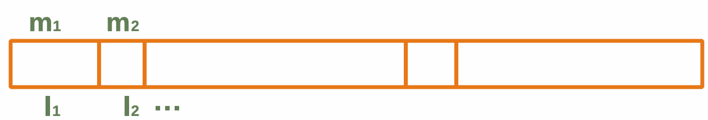
می‌بینید که در موقع تعادل مکان جسم هم بینهایت دور است.

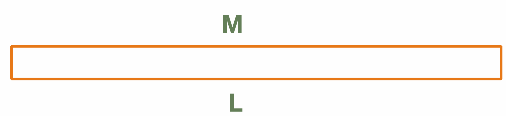
یکی از کاربردهای انتگرال در تعریفی مناسب برای میانگین کمیات است.

فرض کنید تعدادی میله به طولهای مختلف (l_i) و جرمهای مختلف (m_i)داریم کـه هـر میلـه‌ای دارای چگالی جرمی طولی $l_i = \frac{m_i}{l_i}$ است و این چگالی در تمام میله یکنواخت است. حال فـرض کنیـد

بخواهیم میله به طول $L=\sum l_i$ (مجموع طول میله‌ها) و جرم $M=\sum m_i$ (مجموع جرم میله‌ها) بسازیم بطوریکه از جنسی با چگالی یکنواخت باشد. مقدار این چگالی طولی چه خواهد بود؟

واضح است که $M=\sum m_i=\lambda L=\lambda\sum l_i$





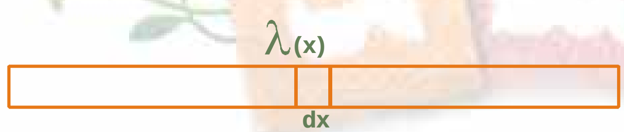
اگر بنویسیم $m_i=\lambda_i l_i$ آنگاه

$$\lambda=\frac{M}{L}=\frac{\sum m_i}{\sum l_i}=\frac{\sum \lambda_i l_i}{\sum l_i}$$

این را می‌توان میانگین کمیت λ_i تعریف کرد یعنی $\bar{\lambda}=\frac{\sum \lambda_i l_i}{\sum l_i}$ آن چگالی است که اگر کل طولها با آن ساخته شود جرم کل را به ما می‌دهد. $M=\bar{\lambda}l$.

حال فرض کنید جای چند میله، یک میله داریم منتها چگالی نقاط مختلف آن با هم فرق دارد. یعنی $\lambda=\lambda(x)$. با این حساب جرم قطعه‌ای به طول dx بر روی میله در مکان x خواهد بود:

$$dm(x)=\lambda(x)dx$$



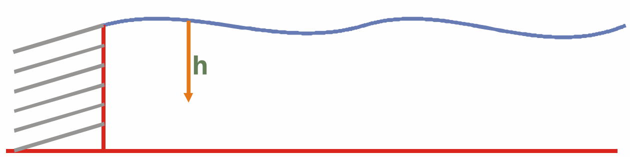
بنظرتان در اینجا میانگین l را چگونه تعریف کنیم؟

$$\bar{l} = \frac{\sum \lim m_i}{\sum \lim l_i} = \frac{\sum l_i \lim l_i}{\sum \lim l_i} = \frac{\int_0^L l\,dx}{L}$$

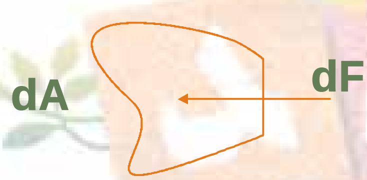
در اینجا $\lim l_i = dx$ است. پس تعریف مناسب برای مثلاً میانگین تابع $f(x)$ در بازه (a,b) می‌تواند باشد:

$$\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

مثال. سدی به عرض W و ارتفاع H داریم که پشت آن آب جمع شده است.

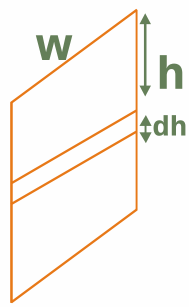


می‌دانیم که فشار آب برحسب عمق از سطح بفرم $P(h) = P_0 + rgh$ خواهد بود. از تعریف فشار هم می‌دانیم که $P = \frac{dF}{dA}$ یعنی فشار هر نقطه برابر است با حاصل تقسیم نیروی کوچکی که بر سطح کوچکی حول و حوش آن نقطه وارد می‌شود.



آب در پشت سد چه مقدار نیرو به سد وارد می‌کند؟

حل. ابتدا باید dA مناسبی روی سد پیاده کرد.



مطابق شکل اگر در عمق h نواری به ضخامت dh و عرض سد (W) در نظر بگیریم آنگاه

$$dA(h) = W dh$$

این المان سطح مناسبی است زیرا صرفاً تابع عمق است. از تعریف فشار، مقدار نیرویی که بر این المان وارد می‌شود خواهد بود:

$$dF(h) = P(h)\ dA(h) = (P_0 + r gh) W dh$$

نیروی کل طبعاً جمع تمام این نیروها از بالا تا پایین سد است:

$$F_{total} = \int_{h=0}^{h=H} dF = \int_{0}^{H} (P_0 + r gh) W dh = P_0 W H + r g W \frac{H^2}{2}$$

فشار میانگین را می‌توان به این گونه تعریف کرد:

$$\overline{P} = \frac{F_{total}}{A_{total}} = \frac{\overset{\text{روی سطح}}{\int} PdA}{A_{total}}$$

که در اینجا

$$\bar{P}=\frac{P_0WH+rg\frac{H}{2}WH}{WH}=P_0+rg\frac{H}{2}$$

که همانطور که می‌بینید همان فشار در مرکز سد $(\frac{H}{2})$ است. امّا آیا همیشه اینگونه می‌شـود؟ قطعـاً نـه تنها در حالتهایی که تابع با متغیرش خطی تغییر می‌کند این اتفاق می‌افتد.

$$f(x)=Ax+B \quad , \quad \bar{f}=\frac{\int_a^b (Ax+B)dx}{b-a}$$

$$\bar{f}=\frac{\left.\frac{Ax^2}{2}+Bx\right]_a^b}{b-a}=\frac{\frac{A}{2}\left(b^2-a^2\right)+B(b-a)}{b-a}=A\left(\frac{b+a}{2}\right)+B=f\left(\frac{b+a}{2}\right)$$

امّا مثلاً اگر $f=x^3$ آنگاه مثلاً در بازه $(0,2)$ میانگین f خواهد بود:

$$\bar{f}=\frac{\int_0^2 x^3dx}{2-0}=\frac{\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2}{2}=\frac{16/4}{2}=2\neq f\left(\frac{0+2}{2}\right)=f(1)=1$$

در حالتیکه تابع خطی است میانگین با میانگین عددی مقدار تابع در ابتدا و انتها نیز برابر است.

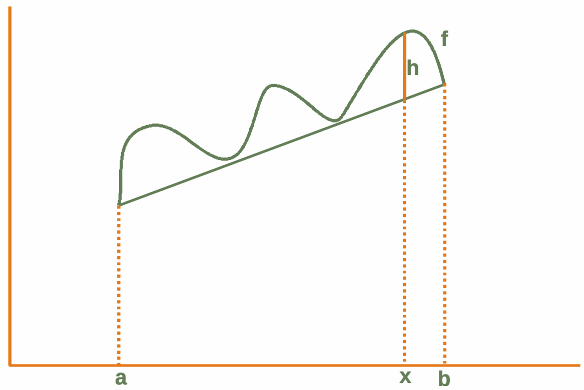
$$f=Ax+B \qquad ; \qquad \bar{f}=A\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)+B=A\frac{a}{2}+\frac{B}{2}+A\frac{b}{2}+\frac{B}{2}=\frac{Aa+B}{2}+\frac{Ab+B}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

امّا باز این مسئله برای حالت کلی صادق نیست مثلاً همان مثال $f=x^3$ در بازه $(0,2)$

$$\bar{f}=2\neq\frac{f(2)+f(0)}{2}=\frac{2^3+0}{2}=4$$

تابع f را در نظر بگیرید. حال در بازه (a,b) خط گذرنده از دو نقطه $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ را در نظر داشته باشید.



می‌شود f را به فرم زیر نوشت.

$$f(x) = h(x) + Ax + B$$

$h(x)$ مقدار باقیمانده f نسبت به خط مذکور است.

$$\left.\begin{array}{l} h(a)=0 \Rightarrow f(a)=Aa+B \\ h(b)=0 \Rightarrow f(b)=Ab+B \end{array}\right\} \Rightarrow A=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \;\; ; \;\; B=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

حال میانگین f را حساب می‌کنیم:

$$\bar{f}=\frac{\int_a^b f dx}{b-a}=\frac{\int_a^b [h+Ax+B]dx}{b-a}=\frac{\int_a^b h dx}{b-a}+\frac{f(b)+f(a)}{2}=\bar{h}+\frac{f(b)+f(a)}{2}$$

پیداست اگر $\bar{h}=0$ آنگاه مانند توابع خطی $\bar{f}=\frac{f(b)+f(a)}{2}$. امّا در حالتهای دیگـر بـسته بـه آنکـه

$\int_a^b h\,dx$ چه شود می‌تواند $\bar{f}$ بزرگتر یا کوچکتر از مقدار میانگین ابتدا و انتهای بازه شود.

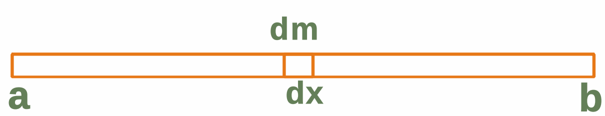
مرکز جرم تعدادی جرم نقطه (m_i) که روی خطی در مکانهای (x_i) قرار دارند طبق تعریف

$$x_{CM}=\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

است. حال اگر ما جسم پیوسته‌ای داشته باشیم آنوقت نقاط ما تبدیل به المانهـای کـوچکی روی جـسم

می‌شود که هر کدام جرم dm دارند.

فرض کنید میله‌ای داریم که چگالی طولی نقاطش $l_{(x)}$ باشد.



آنگاه در مکان x مقدار dm جرم معادل با طول dx روی میلـه خواهـد بـود. $dm=l(x)dx$ در

اینجا مرکز جرم طبعاً خواهد شد:

$$x_{CM}=\frac{\int_a^b x\,dm(x)}{\int_a^b dm}=\frac{\int_a^b x\,l(x)dx}{\int_a^b l(x)dx}$$

فرق این با میانگین عادی در آنست که تابع دیگری $l(x)$ به انتگرال اضافه شده. پس مـی‌تـوان

میانگین جدیدی برای تابع f تعریف کرد.

$$\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x)w(x)dx}{\int_a^b w(x)dx}$$

که میانگین تابع f در بازه (a,b) با وزن $w(x)$ است. تابع وزن مانند فراوانی در آماری مـی‌مانـد یعنـی آنکه مثلاً از تابع f در نقطه x چه مقدار (w) باید در میانگین‌گیری شرکت کند. حالت گسسته آن طبعاً این گونه بود:

$$\bar{f} = \frac{\sum f_i w_i}{\sum w_i}$$

فرض کنید تابع f داریم و همچنین $u = u(x)$.

$$g(x) := f(u(x))$$

می‌خواهیم ببینیم میانگین f نسبت به u با میانگین آن نسبت به x چه رابطه خواهد داشت:

$$\bar{f_u} = \frac{\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du}{u(b)-u(a)} = \frac{\int_a^b f(u(x))u'dx}{u(b)-u(a)} = \frac{\int_a^b g(x)u'dx}{\int_a^b u'dx}$$

می‌بینید که میانگین f نسبت به u مانند میانگین $g = f(u(x))$ با وزن u' نسبت به x است.

مثال. میانگین زمانی و مکانی یک نیرو با ضابطه $F = F(x)$ را با هم مقایسه کنید.

از قانون دوم داریم که $m\ddot{x} = F(x)$

حل.

$$\overline{F}_x = \frac{\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx}{x_2 - x_1} = \frac{W(x_1 \to x_2)}{x_2 - x_1}$$

که انتگرال $\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$، کار نیروی F در بازه (x_1, x_2) می‌گویند.

منظور از میانگین زمانی آن است که متحرکی را با سرعت اولیه $\dot{x}_1 = v_1$ در نقطه x_1 بگذاریم و ببینیم تحت نیرو F برحسب زمان مکانش چگونه خواهد بود در این صورت x برای متحرک تابع زمان (و سرعت اولیه) خواهد شد. یعنی نوعی تغییر متغیر رخ خواهد داد.

$$\bar{F}_t = \frac{\int_{t_1}^{t_2} F(x(t))dt}{t_2 - t_1}$$

امّا از قانون دوم داریم $F = m\ddot{x} \Leftarrow \ddot{x} = \frac{F}{m}$

$$\Rightarrow \bar{F}_t = \frac{\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}(t)dt}{t_2 - t_1} = \frac{\left. m\dot{x}(t) \right]_{t_1}^{t_2}}{t_2 - t_1} = \frac{m(v_2 - v_1)}{t_2 - t_1}$$

در مورد میانگین مکانی چنانچه از قانون دوم استفاده کنیم:

$$\bar{F}_x = \frac{\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx}{x_2 - x_1} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} m\ddot{x}\,dx}{x_2 - x_1}$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{x}^2}{dx}$$

و با جایگذاری در رابطه

$$\bar{F}_x = \frac{\int_{x_1}^{x_2} \frac{m}{2}\frac{d\dot{x}^2}{dx}dx}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{m}{2}\int_{v_1}^{v_2} d\dot{x}^2}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right)}{x_2 - x_1}$$

به رابطه فوق قضیه کار و انرژی نیز می‌گویند یعنی:

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

جالبی این رابطه در آن است که مقدار تغییرات سرعت صرفاً به کار نیرو بستگی دارد که این کار تابع زمان نیست و به شیوه طی کردن فاصله x_1 تا x_2 بستگی ندارد.

اگر به هر دو میانگین دقت کنید هیچکدام به نحوه طی کردن فاصله بین x_1 تا x_2 بستگی ندارند بلکه صرفاً کل جابجایی، کل زمان پیمایش و سرعتها در ابتدا و انتها بستگی دارند. اینها نتیجه قانون دوم نیوتن هستند.

حال بیایید این دو میانگین را با هم ادغام کنیم:

$$\overline{F}_x = \frac{1}{2}m\frac{(v_2+v_1)(v_2-v_1)}{\Delta x} = m\frac{v_2+v_1}{2}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\overline{F}_t = m\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

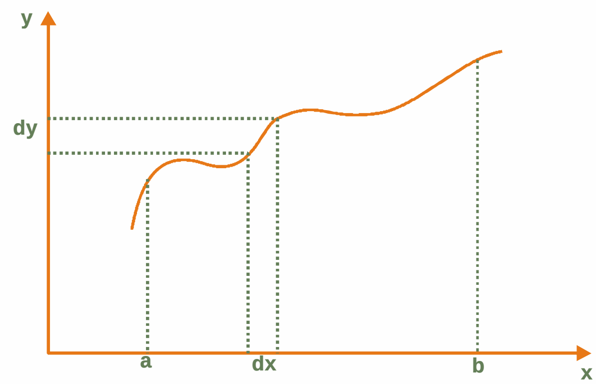
$$\Rightarrow \frac{\overline{F}_x}{\overline{F}_t} = \frac{(v_1+v_2)/2}{\Delta x/\Delta t} = \frac{(v_1+v_2)/2}{\overline{v}}$$

جالب است که نسبت این دو میانگین برابر با نسبت میانگین عددی سرعت ابتدا و انتها به سرعت میانگین در مدت Dt است.

مثال. طول منحنی $y = f(x)$ را در فاصله a تا b برحسب انتگرال بنویسید.

حل. اگر دو نقطه (x, y) , $(x+dx, y+dy)$ را در نظر بگیریم مقدار طول بین این دو نقطه (بطور حدی) با مقدار فاصله این دو نقطه یکی است یعنی:

$$dl = \sqrt{dy^2 + dx^2}$$

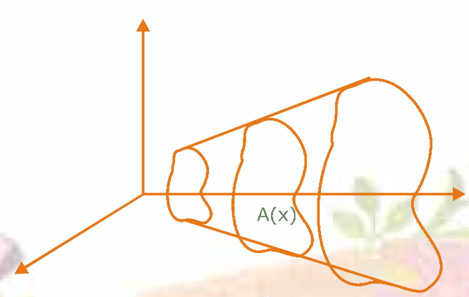


اگر از dx فاکتور بگیریم.

$$dl = \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}\ dx = \sqrt{f'^2 + 1}\ dx$$

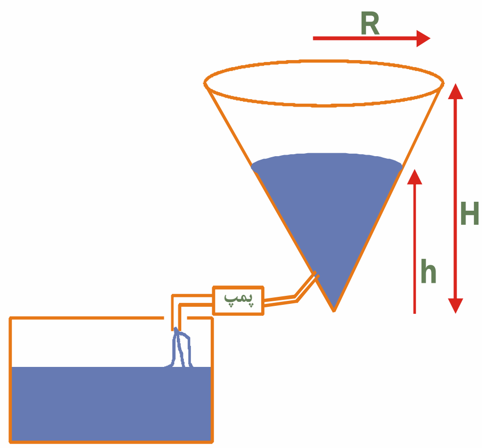
$$\Rightarrow l = \int_{x=a}^{x=b} dl = \int_a^b \sqrt{1+f'^2}\ dx$$

با انتگرال حجم اجسام را نیز می‌توان حساب کرد مثلاً اگر جسمی داشته باشیم که در امتداد محور x کشیده شده باشد و سطح مقطع آن در x، $A(x)$ باشد آنگاه المان کوچک حجم که حاصل از کشیده شدن $A(x)$ به اندازه dx است برابر است با $dv = A(x)dx$ و حجم کل خواهد بود:



$$v = \int_{x=a}^{x=b} dv = \int_a^b A(x)dx$$

مثال. پمپی آب را درون تانکر مخروطی شکل مطابق شکل می‌ریزد.



آب از منبعی بسیار بزرگ که سطحش هم سطح انتهای مخـروط اسـت وارد مخـروط مـی‌شـود.

می‌دانیم که کار لازم برای بالا بردن m جرم از آب تا ارتفاع h، $W = mgh$ است. پمپ چقدر بایـد کـار انجام دهد تا مخروط پر شود؟

حل. فرض کنید پمپ تا ارتفاع h را پر کرده و حالا می‌خواهد به انـدازه dh ارتفـاع آب را زیـاد کند. مقدار حجم افزایش یافته $dv = A(h)dh$ خواهد بود که $A(h)$ سطح مقطع مخـروط در ارتفـاع h است. مقدار جرم معادل با آن حجم: $dm = rdv = rA(h)dh$ است.

مقدار کار لازم برای این جابجایی: $dW = ghdm = rghA(h)dh$.

می‌دانیم که

$$\frac{A(h)}{A(H)} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 \Rightarrow A(h) = \left(\frac{h}{H}\right)^2 \times pR^2 \Rightarrow dW = rgh\left(\frac{h^2}{H^2}pR^2\right)dh = \frac{rgpR^2}{H^2}h^3dh$$

مقدار کل کار:

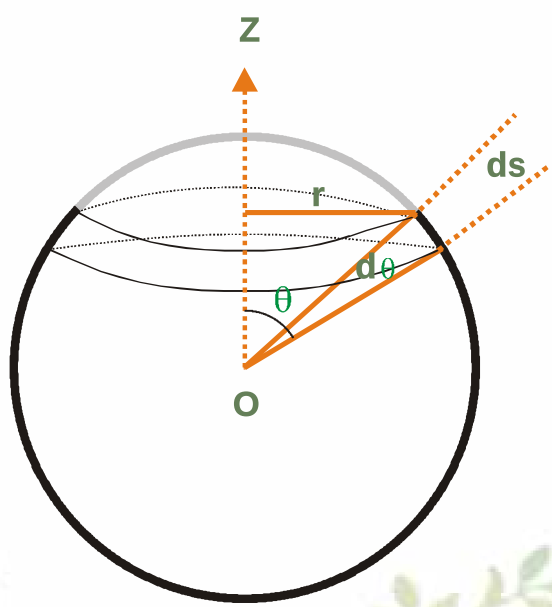
$$W = \int_{h=0}^{h=H} dW = \frac{rgpR^2}{H^2}\int_0^H h^3 dh = \frac{rgp}{4}R^2H^2$$

$$\Rightarrow W = \frac{3}{4} rg\left(\frac{pR^2}{3}H\right)H = \frac{3}{4} grvH = Mg\left(\frac{3}{4}H\right)$$

که M جرم کل آب داخل مخروط است $H_{CM} = \frac{3}{4}H$ ارتفاع مرکز جرم مخروط است.

مثال. سطح یک کره را بدست آورید.

حل. باید المانهای سطح dA را پیدا کنیم و سپس انتگرال بگیریم. امّا چه المانهایی مناسب است و این المانها باید برحسب چه متغیری بیان شوند؟



مطابق شکل زاویه q را نسبت به محور oz تعریف می‌کنیم. طبعاً برای کره $q \in [0,p]$ خواهد بود.

حال نوارهایی را روی سطح کره در نظر می‌گیریم که مقابل به زاویه dq باشد. عـرض نــوار $ds = Rdq$.

شعاع نوارها (نسبت به oz) $r = Rsinq$ می‌باشد.

حال المان مساحت را همان مساحت نوار در نظر می‌گیریم.

$dA = pds$ (p طول نوار است.)

p در اصل محیط دایره‌ای به شعاع r است پس:

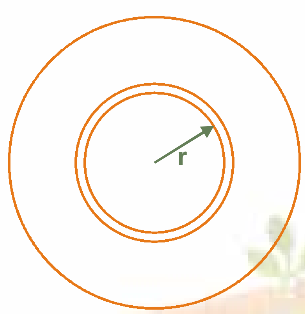
$$dA = 2p\,rds = 2p\,Rsinq\,Rdq = 2p\,R^2 sinq\,dq$$

این المان سطح ماست که برحسب q بیان شده.

$$A = \int_{q=0}^{q=p} dA = \int_0^p 2p\,R^2 sinq\;dq = 2p\,R^2 \int_0^p sinq\;dq = 4p\,R^2$$

مثال. حجم یک کره را بدست آورید.

حل. در اینجا باید المانهای حجم مناسبی در نظر بگیریم.



المانهای حجم را پوسته‌هایی کروی حول مرکز در نظر می‌گیریم. ضخامت هر کدام dr است و سطحشان (طبق مثال قبل) $A(r) = 4pr^2$ خواهد بود. کافی است از $r = 0$ تا $r = R$ انتگرال بگیریم.

$$dV = A(r)dr = 4pr^2dr$$

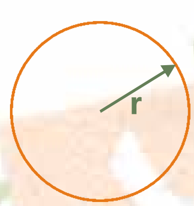
$$V = \int_{r=0}^{r=R} dV = \int_0^R 4pr^2dr = \frac{4pR^3}{3}$$

مثال. فرض کنید ماده‌ای در فضا داریم که چگالی آن با شعاع از یک مرکز تغییر می‌کند یعنی $r = r(r)$ می‌دانیم که اگر کره‌ای به شعاع r را از این ماده (هم مرکز با مرکز چگالی) در نظر بگیریم اندازه شتاب گرانشی در سطح کره متناسب با جرم داخل کره $M(r)$ و متناسب با معکوس شعاع است. $\left(\frac{1}{r^2}\right)$ یعنی:

$$g(r) = G\frac{M(r)}{r^2}$$

حال بگویید چگالی در هر شعاع باید در چه شرطی صدق کند تا با افزایش شعاع، میدان گرانشی کاهش یابد.

حل. ابتدا باید g را برحسب $r, r, ...$ بنویسیم.



المان حجم در هر شعاع حول مرکز $dV = 4\pi r^2 dr$ است.

پس جرم این المان $dm = \rho dV = 4\pi r^2 \rho(r) dr$ مقدار جرم کل داخل شعاع r خواهد بود:

$$M(r) = \int_{r=0}^{r=r} dm = \int_0^r 4pr^2 r(r) dr$$

پس شتاب گرانشی خواهد بود:

$$g(r) = G\frac{\int_0^r 4pr^2 r(r) dr}{r^2}$$

ما می‌خواهیم با افزایش شعاع g کاهش یابد پس g باید تابعی نزولی از r باشد یعنی:

$$\frac{dg(r)}{dr} < 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(\frac{M(r)}{r^2}\right) < 0$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{M(r)}{r^2}\right) = -\frac{M(r)}{r} + \frac{M'(r)}{r^2}$$

از آنجا که

$$M(r) = \int_0^r 4p r^2 r(r) dr$$

قطعاً $M(r)$ تابع اولیه انتگرالده است پس:

$$M'(r) = 4p r^2 r(r)$$

$$\frac{d\left(M\left(r\right)/r^{2}\right)}{dr}<0$$

$$\Rightarrow -\frac{M\left(r\right)}{r}+\frac{4p\,r^{2}\,r\left(r\right)}{r^{2}}<0$$

$$\Rightarrow r\left(r\right)<\frac{M\left(r\right)}{4p\,r^{3}}=\frac{1}{3}\frac{M\left(r\right)}{\frac{4}{3}p\,r^{3}}=\frac{1}{3}\frac{M\left(r\right)}{V\left(r\right)}=\frac{1}{3}\,\overline{r}$$

$$\Rightarrow 3r\left(r\right)<\overline{r}$$

که $\overline{r}$ چگالی میانگین تا شعاع r است.

در مورد حالتیکه $r=\overline{r}$ است شتاب قطعاً با شعاع افزایش می‌یابد. بخاطر همین است که هر چه داخل زمین برویم شتاب گرانش کمتر می‌شود.

در تعریف میانگین چگالی اگر دقت کرده باشید چگالی $r\left(r\right)$ را با وزن $4p\,r^{2}$ میانگین گرفتیم.

$$\overline{r}=\frac{M}{V}=\frac{\int_{0}^{R} r\left(r\right)4p\,r^{2}dr}{\frac{4}{3}p\,R^{3}}=\frac{\int_{0}^{R} r\left(r\right)4p\,r^{2}dr}{\int_{0}^{R}4p\,r^{2}dr}$$

معمولاً تابع وزن در حالتهایی پیدا می‌شود که تغییر متغیری داده‌ایم. در اینجا در اصل داشتیم:

$$\overline{r}=\frac{\int_{\text{کره}} r\,dV}{\int_{\text{کره}} dV}$$

که تغییر متغیرمان $V=\frac{4}{3}p\,r^{3}$ بود.