## بردار مکان:

در فصل "حساب برداری" به مقدار زیادی در مورد بردار مکان و مختصاتهای مختلف صحبت کرده‌ایم و در اینجا صرفاً به یادآوری بعضی مباحث می‌پردازیم.

بردار مکان را که مکان نسبی هر نقطه را نسبت به مبدأ "$O$" تعیین می‌کند می‌توان در مختصاتهای مختلف به صورت متفاوت نمایش داد:

دکارتی:

$$\vec{r} \equiv (x , y , z) = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

استوانه‌ای:

$$\vec{r} = r\,\hat{r} + z\hat{k}$$

کروی:

$$\vec{r} = r\,\hat{r}$$

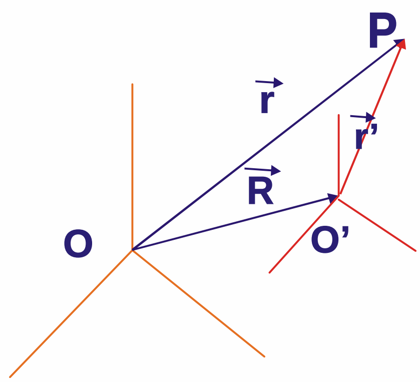
بردار مکان اساس سینماتیک را به همراه زمان تشکیل می‌دهد. خیلی از کمیات فیزیکی توابعی از این دو هستند. مثلاً شتاب گرانشی کرهٔ زمین در هر نقطه از اطراف آن تابع $\vec{r}$ است به فرم:

$$g(\vec{r}) = {-GM\,\hat{r}}\big/{r^2}$$

که $\vec{r}$ از مرکز زمین سنجیده می‌شود.

معمولاً مبدأ مختصات را در مسائلمان ما بروی سطح زمین در نقطه‌ای مشخص در نظر می‌گیریم.

امّا فرض کنید دو مرجع مختصات مختلف $O$ و $O'$ داشته باشیم که بردار مکان $O$ نسبت به $O'$، $\vec{R}$ باشد.




حال می‌خواهیم بدانیم مکان نقطهٔ مشخصی در فضا که توسط این دو مرجع مشخص می‌شوند چگونه به هم مرتبط می‌شوند، همانطور که از شکل و شهود ما پیداست:

$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$ یا $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$

این رابطه به بیان اندیسی خواهد شد:

$$\vec{r}_{P/O'} = \vec{r}_{P/O} - \vec{r}_{O'/O}$$

یا

$$\vec{r}_{P/O} = \vec{r}_{P/O'} + \vec{r}_{O'/O}$$

بدیهی است که $\vec{r}_{O'/O} = -\vec{r}_{O/O'}$ .

البته باید حواسمان باشد که جمعهای برداری را در صورتی می‌توانیم به راحتی انجام دهیم که جهت‌گیری دستگاهها با هم دیگر موازی باشند. یعنی:

$(x, y, z) = (x' + X\,,\ y' + Y\,,\ z' + Z)$ که $\vec{r}' \equiv (x', y', z')$

$$\vec{R} \equiv (X, Y, Z)$$

## سرعت[1]

در بحث مشتق اشاراتی به آهنگ تغییر کمیات کردیم. سرعت آهنگ زمانی تغییر بردار مکان است.

به این معنا که اگر مسائلمان یک بعدی باشد یعنی مکان ذرهٔ مورد نظرمان با $x$ مشخص شود آنگاه سرعت متحرک خواهد بود $V = \dot{x}$ یعنی $V = \dfrac{dx}{dt}$.

سرعت میانگین برابر است با مقدار متوسط جابجایی تقسیم بر زمان این جابجایی.

$$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

سرعت لحظه‌ای که مشتق مکان است حد سرعت متوسط برای $\Delta t$های کوچک است.

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{V}$$

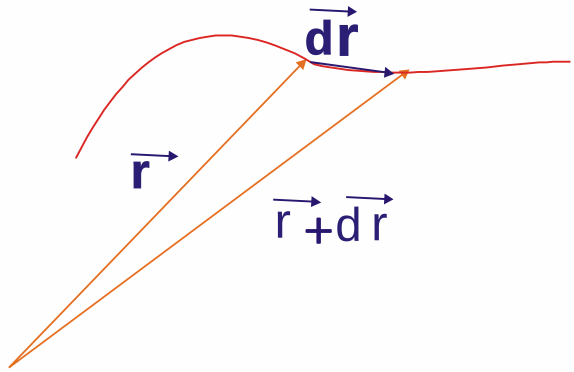
در مسئله‌های 2 و یا 3 بعدی کافی است مشتق مؤلفه‌های دیگر مکان را بگیریم. در کل تعریف بردار سرعت خواهد بود:

$$\vec{V} = d\vec{r} / dt$$

اگر منحنی حرکت متحرکی را مورد توجه قرار دهید خواهید دید که بردار سرعت همواره مماس بر مسیر حرکت ذره است.

---

1. *Velocity*




می‌توان گفت که $\vec{V}$ به ما می‌گوید که اگر متحرک در جهت $\vec{V}$ بخواهد حرکت کند اگر یک واحد زمانی بگذرد چقدر جابجا خواهد شد. این جابجایی بر واحد زمان همان مفهوم بنیادی سرعت است.

پس بردار $\vec{V}$ در هر لحظه حامل دو اطلاع است:

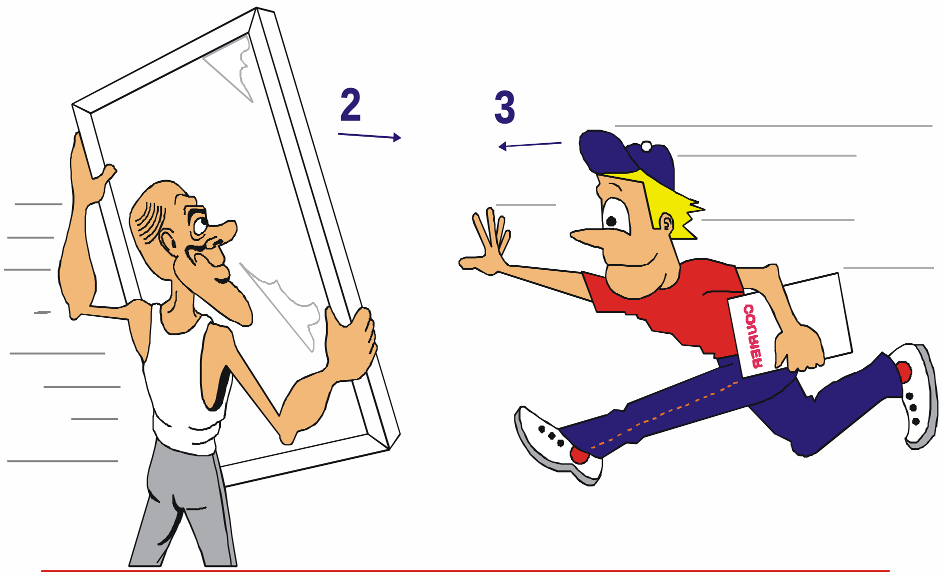
1. جهت حرکت همان جهت $\vec{V}$ : $\hat{V}$
2. مقدار آهنگ جابجایی در جهت حرکت، اندازهٔ $\vec{V}$ : $V$

سرعت نسبی را می‌توان به سادگی از روی رابطهٔ مکانهای نسبی دو دستگاه $O$ و $O'$ بدست آورد.

$$\vec{v}' = \dot{\vec{r}}' \quad ; \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} \quad ; \quad \vec{V} = \dot{\vec{R}} \quad (\text{سرعت } O' \text{ نسبت به } O)$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}' = \left(\vec{r} - \vec{R}\right)^{\cdot} = \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{R}} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$

مثال. شخصی آینه‌ای در دست دارد و با سرعت $2\ m/s$ در حال حرکت است. شخص دیگری با سرعت $3\ m/s$ به سمت آینه در حال حرکت است. این شخص سرعت تصویر خود را در آینه چقدر می‌بیند؟




**حل. آن سرعتی که ما می‌خواهیم محاسبه کنیم سرعت تصویر شخص دوم نسبت به خودش است. راه حل شهودی مسئله چنین است: بعد از $1\ s$ آینه $2m$ جلو آمده، این باعث می‌شود تصویر شخص دوم (اگر خودش حرکت نکند) $4m$ جلو بیاید. حال آینه را ثابت بگیرید و شخص را $3m$ به سمت آینه بیاورید. این بار $3m$ تصویر در آینه جلو می‌آید. پس سرجمع $7m$ تصویر در آینه نسبت به زمین جلو می‌آید امّا خود شخص هم $3m$ به آینه نزدیک شده است پس تصویر نسبت به شخص $10m$ نزدیک شده است پس در این $1\ s$ تصویر $10m$ به شخص نزدیک شده است نتیجتاً سرعت تصویر نسبت به شخص $10\ m/s$ خواهد بود.**

**خواهیم داشت:**

**سرعت شخص $u = -3\ m/s$**

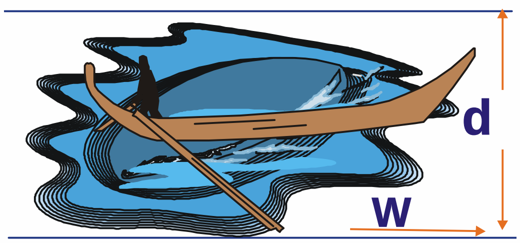
**سرعت آینه $V = 2\ m/s$**

**سرعت آینه نسبت به شخص $W = V - u = 5\ m/s$**

و می‌دانیم که سرعت تصویر دو برابر سرعت آینه است. در نتیجه:

سرعت تصویر نسبت به شخص $X = 2W = 10 \ m/s$

مثال. قایقرانی می‌تواند با سرعت $u$ پارو بزند. او می‌خواهد از عرض رودخانه‌ای بـا سـرعت آب $w$ عبور کند. می‌دانیم که $u > w$ است و عرض رودخانه $d$ است.




الف. با چه زاویه‌ای پارو بزند تا مستقیماً به طور عمود بر راستای رودخانه به نقطهٔ مقابل ساحل برسد؟

ب. با چه زاویه‌ای پارو بزند که کمترین زمان را برای رسیدن به سمت دیگر رودخانه طی کند؟

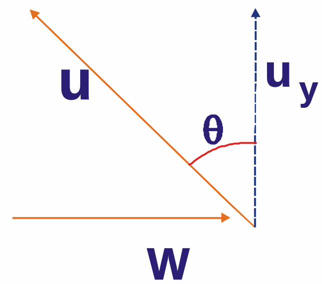
ج. آیا ممکن است ابتدا با زاویه‌ای پارو بزند و به سمت دیگر رودخانه برسد سپس به سمت نقطهٔ مقابل ساحل نسبت به حالت رفت پارو بزند و به آن برسد و مدت زمان طی شده کمتر از حالت "الف" شود؟ اگر می‌شود آن زاویه را بدست آورید.

حل. سرعت پارو زدن نسبت به آب است. پس سرعت واقعی (نسبت به زمین) قایق همواره خواهد بود:

$\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$

در حالتهای مختلف جهت بردار $\vec{u}$ و در نتیجه $\vec{v}$ تغییر خواهد یافت.

**الف.** کافی است که مؤلفهٔ افقی $u$ ، $w$ را خنثی کند و مؤلفهٔ $y$ آن باعث حرکت قایق به سمت طرف دیگر رودخانه شود:

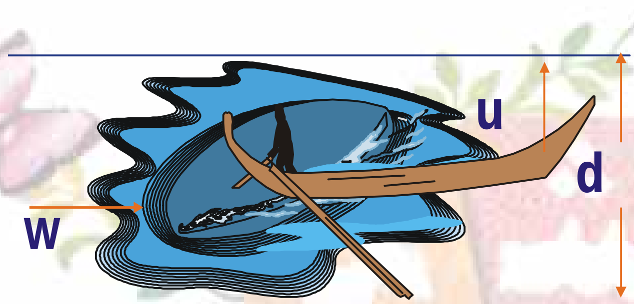



$$w = u_x = u \sin\theta$$

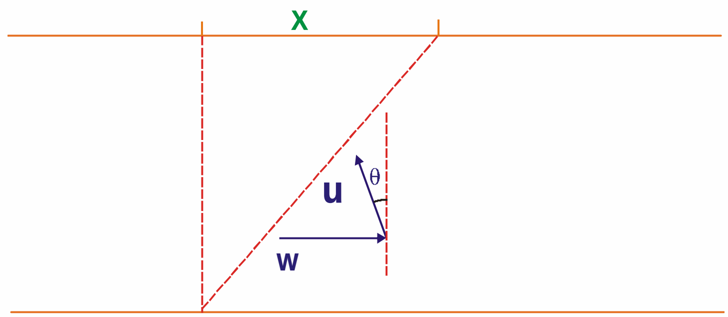
$$\Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{w}{u}\right)$$

در این حالت مدت زمان عبور $t_{\text{الف}} = \frac{d}{u_y} = \frac{d}{\sqrt{u^2 - w^2}}$

**ب.** هر چه مقدار $u_y$ بیشتر باشد قایق سریعتر به طرف مقابل خواهد رسید سریعترین حالت آن است که $u_y = u$ باشد: $q = 0$ $t_{\text{ب}} = \frac{d}{u}$



ج. این یک مسئله بهینه‌سازی است:




$$t_1 = \frac{d}{u_y} = \frac{d}{u\ \cos\theta}$$

$$x = \left(w - u_x\right) t_1 = d\left(\frac{w}{u}\sec\theta - \tan\theta\right)$$

با فرض $x<0$ ؛ $t_2 = \frac{x}{u+w}$ ؛ با فرض $x>0$ : $t_2 = \frac{x}{u-w}$

$$t_{چ} = t_1 + t_2 = \frac{d}{u}\sec q + \frac{d}{u \mp w}\left(\frac{w}{u}\sec q - \tan q\right)$$

که – برای حالت $x>0$ یعنی حالت $w>u_x$ یا $\frac{w}{u} > \sin\theta$

و + برای حالت $x<0$ یعنی حالت $u_x > w$ یا $\frac{w}{u} < \sin\theta$ می‌باشند.

برای بهینه‌کردن کافی است که مشتق $t_{چ}$ را نسبت به $q$ بگیریم و مساوی صفر قرار دهیم:

$$t'_{(ج)}(\theta)=\frac{d}{u}\sec\theta\tan\theta+\frac{d}{u\pm w}\left(\frac{w}{u}\sec\theta\tan\theta-\sec^2\theta\right)=0$$

$$\Rightarrow\qquad\left(1+\frac{w}{u\mp w}\right)\tan\theta=\frac{u}{u\mp w}\sec\theta$$

$$\Rightarrow\qquad(u+w\mp w)'\sin\theta=u\quad\Rightarrow\quad\sin\theta=\frac{u}{u+W\mp w}$$

**هیچگاه نمی‌رسد** $\Rightarrow$ $\theta=\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\sin\theta=1$ **:وقتی**

$$\sin\theta=\frac{u}{u+2w}$$

**البته این برای حالتی است که $x<0$ ؛ پس باید شرط $\sin\theta>w/u$ برقرار باشد یعنی:**

$$u^2>uw+2w^2$$

**که این شرط اضافه‌ایست که برای این حالت می‌بایست صادق باشد.**

## شتاب[2]

**شتاب آهنگ تغییر سرعت است و به همان شکل سرعت که از روی مکان تعریف شد از روی سرعت تعریف می‌شود.**

$$\vec{a}=d\vec{V}/dt$$

**روابط شتاب نسبی دستگاهها هم به فرم زیر خواهد بود:**

---

2. *acceleration*

$$\dot{\vec v}' = \dot{\vec v} - \dot{\vec V} \qquad \Rightarrow \qquad \vec a' = \vec a - \vec A$$

که $\vec a'$: شتاب ذره در دستگاه $O'$ و $\vec a$: شتاب ذره در دستگاه $O$ و $\vec A$: شتاب دستگاه $O'$ نسبت بـه $O$ است.

چنانچه $O'$ نسبت به $O$ شتاب نداشته باشد آنگاه $\vec a' = \vec a$ خواهد شد که حالتی خـاص اسـت. در این حالت می‌گوییم که این دو دستگاه نسبت به هم لخت[3] هستند.

این مطلب بعدها در قوانین مکانیک بدردتان خواهد خورد.

ما تا شتاب یعنی مشتق دوم مکان بیشتر پیش نخواهیم رفت $\vec a = \dot{\vec v} = \ddot{\vec x}$ زیـرا خواهیـد دیـد کـه در قوانین نیوتن و اکثر مسائل متعارف صرفاً تا همین حد مشتق از مکان کافی است.

می‌ماند روابط معکوس این تعاریف طبق تعریف انتگرال:

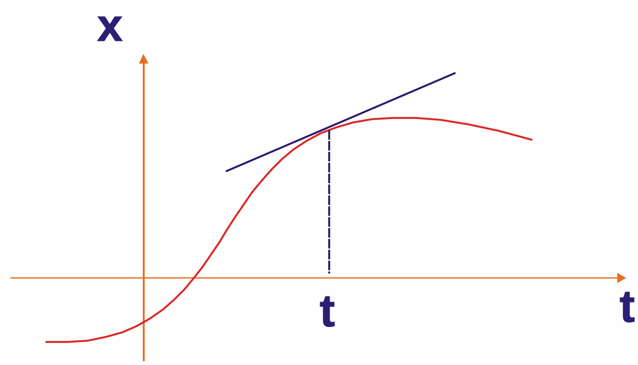
$$\vec v(t) - \vec v(0) = \int_0^t \vec a \, dt'$$

$$\vec x(t) - \vec x(0) = \int_0^t \vec v \, dt'' = \int_0^t \left( \left( \int_0^t \vec a \, dt' \right) + \vec v_0 \right) dt'' = \int_0^t \int_0^t \left( \vec a + \frac{\vec v_0}{t} \right) dt' \, dt''$$

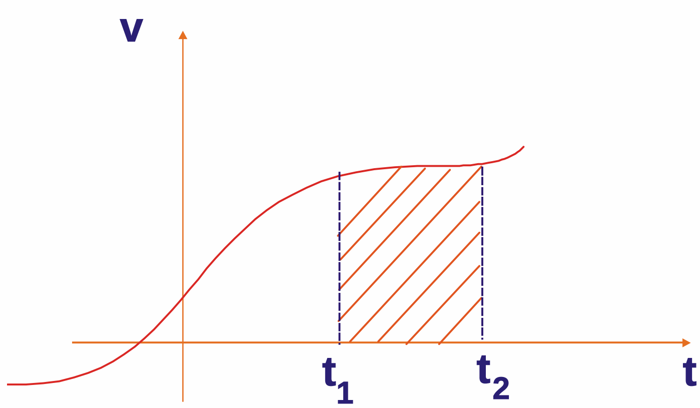
تعبیر هندسی سرعت در حرکت یک بعدی، شیب خط مماس بر منحنی $x-t$ اسـت کـه همـان مفهوم مشتق را می‌رساند. امّا تعبیر مکان روی منحنی سرعت- زمان چیست؟

---

3. inertial




بیایید نگاهی به مساحت زیر نمودار $v-t$ در بازهٔ زمانی $(t_1-t_2)$ بیندازیم. اگر ایـن مـساحت را برحسب بسط انتگرال آن بخواهیم بنویسیم خواهد شد:




$$S_{t_1\to t_2}=\lim_{Dt\to 0}\sum V(t)\Delta t=\int_{t_1}^{t_2} V\,dt$$

امّا $dx=v\,dt$ است پس

$$S_{t_1\to t_2}=\sum Dx=x_2-x_1$$

مثال. ذره‌ای با شتاب ثابت $a$ حرکت می‌کند. روابط مکان و سرعت آن را برحسب زمـان بدسـت آورید.

حل.

$$v - v_0 = \int_0^t a dt' = at \quad \Rightarrow \quad v = v_0 + at$$

$$x - x_0 = \int_0^t v\, dt' = \int_0^t \left(v_0 + at'\right) dt' = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\Rightarrow \quad x = x_0 + \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t$$

در بعضی شرایط بعضی بازیهای ریاضی می‌تواند به حل و یا ساده‌سازی مسائل کم کند مثلاً می‌توان نوشت:

$$a = {dv}/{dt} = \frac{dv}{dx}\ \frac{dx}{dt} = v\ \frac{dv}{dx} = \frac{d\, {v^2}/{2}}{d\,x}$$

$$\Rightarrow \quad v^2 - v_0^2 = 2 \int_{x_0}^{x} a\, dx$$

در حالت شتاب ثابت $v^2 - v_0^2 = 2a\left(x - x_0\right)$

در حالت کلی اگر شتاب تابع مکان باشد انتگرال بالا بطور مستقیم اختلاف توان دو سرعتها را برحسب موقعیتها می‌دهد. مثلاً فرض کنید که بدانیم شتاب گرانش تابعی به فرم $g(y) = -\frac{GM}{y^2}$ باشد.

در این صورت:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \int_{y_0}^{y} -\frac{GM}{y^2}\, dy \quad = \quad 2GM\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right)$$

اگر $y_0 = R_e$ شعاع زمین باشد آنگاه سرعت ذره برحسب ارتفاع از سطح زمین خواهد بود:

$$y = R_e + h \quad ; \quad y_0 = R_e \quad ;$$

$$v^2(h) = v_0^2 + 2GM\left(\frac{1}{h+R_e} - \frac{1}{R_e}\right) = v_0^2 + 2GM\ \frac{-h}{R_e\left(R_e+h\right)} = v_0^2 - \frac{2\,GMh}{R_e\ \left(R_e+h\right)}$$

چنانچه $R_e >> h$ باشد آنگاه

$$\cong v_0^{\ 2} - 2\,\frac{GM}{R_e^{\ 2}}\ h$$

که مانند حالت شتاب ثابت با شتاب $g_0 = v_0^2 - 2\,g_0\,h$ است که همان شتاب ثقل در سطح زمین

است. $g\left(R_e\right) = g_0$

حالت دیگر آن است که $h \to \infty$ برود یعنی $h >> R_e$ آنگاه:

$$v^{\ 2} = v_0^{\ 2} - 2\,\frac{GM}{R_e} = v_0^{\ 2} - 2g_0R_e$$

می‌بایست که: $v^{\ 2} \geq 0 \quad \Leftarrow \quad v_0^{\ 2} \geq 2g_0\ R_e$

این به آن معناست که اگر $v_0 \geq \sqrt{2g_0R_e}$ نباشد هیچگاه متحرک به فاصله‌های خیلی دور $(\infty)$

نمی‌رسد. این سرعت که به سرعت فرار از زمین مشهور است عدداً چیزی حدود **11** *km/s* است.

مثال. شتاب متحرکی متناسب با منفی $v$ است $(a = -a\ v)$. مکان آن برحسب زمان چگونه تغییر

می‌کند؟

حل.

$$\frac{dv}{dt}=-a\ v \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv}{v}=-a\ dt$$

$$\Rightarrow \qquad d\ \ln v=-a\ dt$$

$$\Rightarrow \qquad \ln v-\ln v_0=-a\,t$$

$$\Rightarrow \qquad v=v_0\ e^{-a\,t}$$

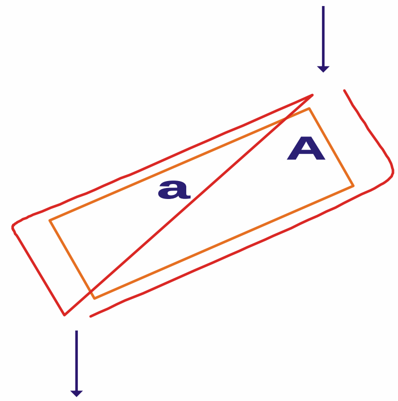
$$x=x_0+\int_0^t v\,dt'=x_0+v_0\int_0^t e^{-a\,t'}dt'=x_0+\frac{v_0}{a}\left(1-e^{-a\,t}\right)$$

مثال فوق نمونه‌ای از نوعی اصطکاک است که باعث شتاب کاهنده‌ای متناسب با سرعت می‌شود. این نوع اصطکاکها در سیالات مایع موسومند. می‌بینید که بعد از زمان طولانی مقدار سرعت صفر می‌شود (سکون) و در این مدت متحرک به اندازهٔ $x-x_0={}^{v_0}\!/_a$ جابجا شده است. این تکه را می‌شد جور دیگری نیز گفت:

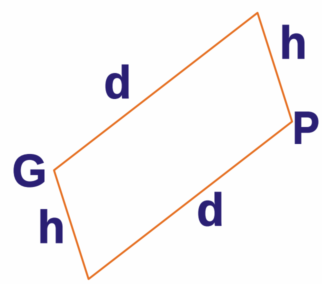
$$a={}^{v\ dv}\!/_{d\,x}=-\alpha v \qquad \Rightarrow \qquad -\alpha d\,x=d\,v \qquad \Rightarrow \qquad v-v_0=-\alpha\left(x-x_0\right)$$

که چون در نهایت $v=0$ است همان رابطهٔ قبلی بدست خواهد آمد.

مثال. دو گلوله از بالای قاب مستطیلی شکلی، مطابق شکل رها می‌شوند. یکی از گلوله‌ها از سمت راست و دیگری از سمت چپ درون قاب پایین می‌آیند و از رأس پایینی خارج می‌شوند. اگر گوشه‌های قاب آنقدر گرد باشند که در سرعت گلوله‌ها تأثیری نداشته باشند، کدامیک از گلوله‌ها از رأس پایینی زودتر خارج می‌شود؟ می‌دانیم که شتاب گلوله‌ها در ضلع کوتاهتر $(A)$ بزرگتر از شتاب آنها در ضلع بلندتر $(a)$ است.




**حل.** ابتدا نشان می‌دهیم که سرعت دو گلوله در هنگام خروج یکی است.

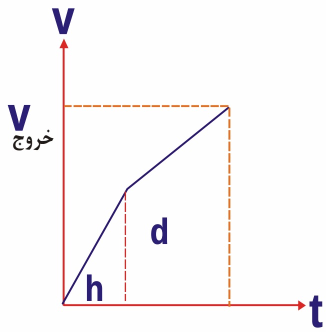



$$v_P=\sqrt{2hA} \qquad\qquad V_G=\sqrt{2da}$$

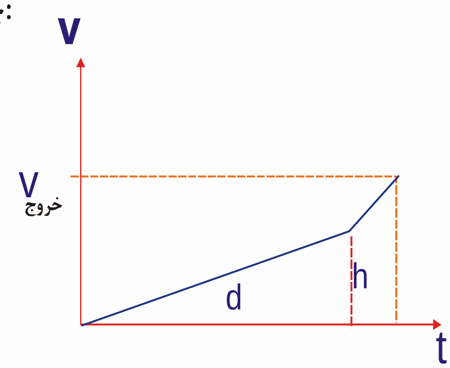
$$\left.\begin{array}{ll} \text{هنگام خروج : چپ} & V_l^2=V_G^2+2hA=2(hA+da) \\ \text{هنگام خروج : راست} & V_r^2=V_P^2+2da=2(da+hA) \end{array}\right\} \Rightarrow V_l=V_r$$

حال به نمودارهای ممکن $V-t$ دو متحرک نگاهی بیندازیم:

راست:




چپ:




**چون که سرعت نهایی هر دو یکی است و هر دو می‌بایست مسافت $h + d$ را طی کنند که همان مساحت زیر نمودار $V-t$ آنهاست. از شکل پیداست که گلوله سمت راست بعلت آنکه زودتر سریع می‌شود، زودتر مسافت $h + d$ را طی می‌کند درحالیکه در مورد سمت چپ این اتفاق کُندتر می‌افتد.**

**گونهٔ دیگر استدلال می‌تواند نمودار زیر باشد:**

**چنانچه هر دو همزمان به نقطهٔ انتهایی برسند قطعاً راست، مسافت بیشتری پیموده که نادرست است.**