در مختصات دکارتی دو بعدی مکان را با دو مختصهٔ $(x\,,\,y)$ مشخص می‌کنیم. طبیعتاً

$$\vec{v} = (\dot{x}\ ,\ \dot{y})$$

$$\vec{a} = (\ddot{x}\ ,\ \ddot{y})$$

در مختصات دکارتی روابط سینماتیک بطور مستقل برای هر مؤلفه بررسی می‌شوند مگر آنکه خود مسئله باعث ترکیب مؤلفه‌ها به یکدیگر گردد مثلاً این که بردار شتاب $\vec{a} = (-\dot{y}\ ,\ \dot{x})$ در مسئله خاصی باشد که آنگاه معادلات حرکت

$$\ddot{x} = -\dot{y}$$
$$\ddot{y} = \dot{x}$$

دارای جفت شدگی می‌شوند.

از جمله حرکتهای دو بعدی که در مختصات دکارتی بخوبی حل می‌شود حرکت پرتابه‌ای است. در این حرکت بردار شتاب $\vec{g} = (0\ ,\ -g)$ می‌باشد که نوعی حرکت شتاب ثابت است.

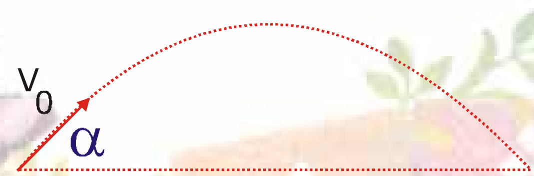
حل آن ساده است در اینجا دو معادله داریم:

$$\ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = V_x \ :\ \text{ثابت} \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + V_x t$$

$$\ddot{y} = -g \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = V_{y_0} - gt \quad \Rightarrow \quad y = y_0 + V_{0y} t - \frac{g}{2} t^2$$

این معادلات مکان پرتابه‌ای تحت شتاب $\vec{g}$ را به ما می‌دهد.

چنانچه سرعت اولیه V_0 و زاویه پرتاب a باشد آنگاه



$$V_{0x} = V_0 \cos\alpha = V_x$$

$$V_{0y} = V_0 \sin\alpha \qquad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

می‌توان از دو معادله بدست آمده t را حذف کرد و y پرتابه را برحسب x اش بدست آورد:

$$t = \frac{x - x_0}{V_x} \quad ; \qquad y = y_0 + \frac{V_{0y}}{V_{0x}}\left(x - x_0\right) - \frac{g\left(x - x_0\right)^2}{2V_{0x}^2}$$

$$= y_0 + \tan\alpha\left(x - x_0\right) - \frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}\left(x - x_0\right)^2$$

که معادلهٔ سهمی می‌باشد. یعنی مسیر پرتابه در فضا سهمی شکل است.

مثال. برد و بیشینه ارتفاع یک پرتابه که با سرعت V_0 و زاویه a پرتاب می‌شود چقدر است.

حل. بیشینه ارتفاع حالتی است که سرعت V_y صفر شود $\Leftarrow \quad V_y^2 - V_{0y}^2 = -2gH$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

مدت زمان رسیدن به اوج $\qquad t = \frac{-V_{0y}}{-g} = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$

مدت زمان رسیدن به برد $(x = 0)$ $\qquad T = 2t = \frac{2V_0 \sin a}{g}$

مقدار برد یعنی جابجایی پرتابه در این مدت:

$$R = V_x T = \frac{2V_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

$$R = \frac{V_0^2 \sin 2a}{g}$$

چنانچه بخواهد دو زاویه متفاوت پرتاب برد یکسانی داشته باشد می‌بایست $sin\ 2\alpha = sin\ 2\alpha'$

شود. که برای زوایای از صفر تا $\frac{p}{2}$ می‌بایست: $0 \le a \ , \ a' \le \frac{p}{2}$

$$2\alpha = \pi - 2\alpha'$$

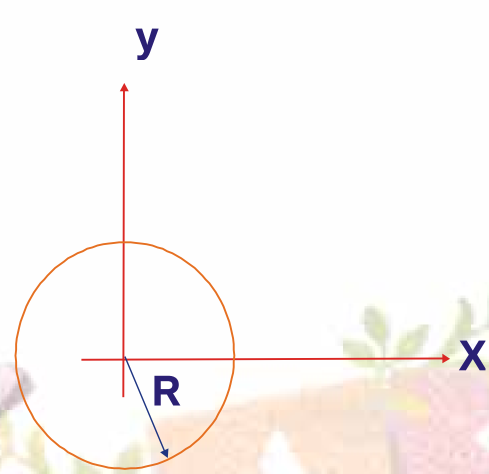
$$\Rightarrow \ \alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

یعنی آنکه قرینهٔ a نسبت به راستای 45 درجه، a' را تعیین می‌کند.

مقدار بیشینه برد برای حالت $sin\ 2\alpha_m = 1 \Leftarrow \alpha_m = \frac{\pi}{4}$ اتفاق می‌افتد.

حرکت دایره‌ای در مختصات دکارتی:

فرض کنید ذره‌ای روی دایره‌ای حرکت کند مکان نقاطی که روی آن حرکت مـی‌کنـد در معادلـهٔ $R^2 = x^2 + y^2$ صدق می‌کند.



فرض کنید با اندازهٔ سرعت ثابت روی دایره حرکت کند، آنگاه $V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$: ثابت.

حال بیایید از روابط حاصل مکان ذره را برحسب زمان بدست آوریم:

$$\dot{R}^2 = 0 = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = -{}^{y}\!/\!_{x}$$

$$\Rightarrow V^2 = \dot{x}^2\left(1 + {}^{x^2}\!/\!_{y^2}\right)$$

$$= \dot{x}^2 \; {}^{R^2}\!/\!_{y^2} = \dot{y}^2 \; {}^{R^2}\!/\!_{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{\dot{x}^2}{R^2 - x^2} \;\Rightarrow\; \left(\frac{V}{R}\right) = \frac{\pm\dot{x}}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \pm\frac{V}{R}dt = \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \;\Rightarrow\; \pm\frac{V}{R}t = -\cos^{-1}\left({}^{x}\!/\!_{R}\right)\Bigg]_{x_0 = R}^{x} \rightarrow \text{برای سادگی}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = R\cos\left(\mp\frac{V}{R}t\right)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = R\sin\left(\mp\frac{V}{R}t\right)$$

که در آرگومانهای توابع مثلثاتی $+\frac{V}{R}$ برای حرکت پادساعتگرد و $-\frac{V}{R}$ برای حرکت ساعتگرد است.

در مورد شتاب این حرکت:

$$\vec{a} = (\ddot{x}\ ,\ \ddot{y})$$

$$V_x = \dot{x} = \pm V \sin\left(\mp \frac{V}{R} t\right)$$

$$V_y = \dot{y} = \mp V \cos\left(\mp \frac{V}{R} t\right)$$

$$a_x = \dot{V}_x = -V^2 / R \cos\left(\mp \frac{V}{R} t\right)$$

$$a_y = \dot{V}_y = -V^2 / R \sin\left(\mp \frac{V}{R} t\right)$$

جالب است که $\vec{R}\ \ \vec{a} = -\frac{V^2}{R^2}(x\ ,\ y) = -\frac{V^2}{R^2}$ یعنی جهت $\vec{a}$ دقیقاً در هر نقطه به سمت مرکز دایره است. مقدار آن نیز همواره $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = V^2 / R$ که به شتاب جانب مرکز[1] معروف است.

در جمله دیگر مسائل مهم در دو بعد، نیروهای عکس مجذوری هستند که عامل شتابهای عکس مجذوری برای ذراتند مانند گرانش، نیروی کولمبی بارها و ...

در این حالت رابطه شتاب در مختصات دکارتی:

$$\vec{a} = -\frac{k}{r^2}\,\hat{r} = -\frac{k}{r^3}\,\vec{r} = -\frac{k}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3}\ (x\ ,\ y)$$

می‌باشد که واضح است معادلات

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\,k\,x \Big/ \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3 \\ \ddot{y} = -\,k\,y \Big/ \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3 \end{cases}$$

براحتی قابل حل نیستند. این معادلات با هم وابستگی دارند و اصلاً براحتی قابـل هـضم نیـستند. ایـن شتاب را در مختصات قطبی با سادگی بیشتری می‌توان حل کرد.

---

1. *Centripetal*