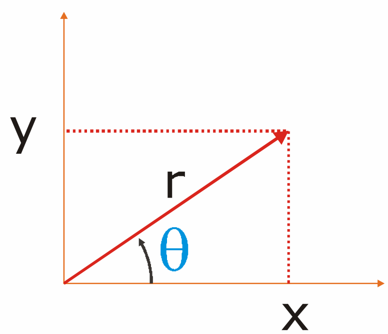
در فصل "حساب برداری" بخش مختصات قطبی بطور مفصل در مورد این مختــصات و بردارهــای یکه آن بحث شده است. در این بخش قصد داریم کمیات مورد نظر در ســینماتیک را در ایــن مختــصات تعریف کنیم و در مورد چند مسئله در مختصات قطبی صحبت نمائیم.

از آنچه گفته شد مختصات هر نقطه در این دستگاه با $(r\ ,\ q)$ مشخص می‌شود و همچنین بردار مکان به فرم $\vec{r} = r\ \hat{r}$ نمایش داده می‌شود. تبدیلات این دستگاه با دستگاه دکارتی به فرم زیر است.



$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

می‌دانیم که سرعت برداری است که تغییرات زمانی $\vec{r}$ را نمایش می‌دهــد. مــا بایــد در مختــصات قطبی این بردار را در هر نقطه برحسب بردارهای یکه آن نقطه و مشتقات و خود $r\ ,\ \theta$ نمایش دهیم تــا به نمایشی کاملاً مختص به این مختصات برسیم:

$$\vec{V} = V_r\ \hat{r} + V_q\ \hat{q}$$

طبق تعریف:

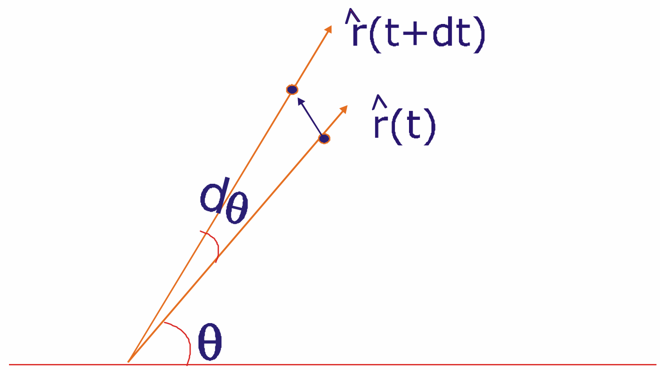
$$\vec{V} = \frac{d\,\vec{r}}{dt} = \frac{d\ r\ \hat{r}}{dt} = \dot{r}\ \hat{r} + r\ \frac{d\,\hat{r}}{dt}$$

در اینجا مسئله اساسی نوشتن تغییرات زمانی $\hat{r}$ برحسب بقیهٔ اجزای مختصات قطبی است.

مطابق شکل وقتی مکان ذره از مختصات (r , q) به $(r+dr \; , \; q+dq)$ تبدیل می‌شود چون جهت بردار مکان تغییر می‌یابد، $\hat{r}(t)$ به $\hat{r}+d\hat{r}$ تبدیل می‌شود که بفرم $\hat{r}\,(t+dt)$ نمایش داده شده است.

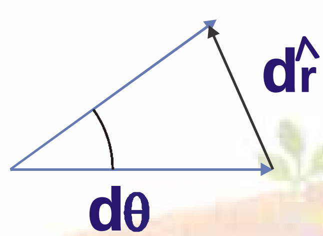
آنچه ما می‌خواهیم بیان $d\hat{r}$ برحسب اجزای شکل است. می‌دانیم که اندازهٔ $\hat{r}$ ثابت و برابر یک است.

پس صرفاً جهت آن است که می‌تواند تغییر کند. از شکل واضح است که این تغییر به اندازه dq است.



از آنجا که dq به سمت صفر می‌رود مقدار طول $d\hat{r}$ برابر است با $|d\hat{r}| = 1\,dq$ یعنی

$|d\hat{r}| = dq$ امّا جهت $d\hat{r}$ چیست؟



وقتی در مثلث شکل نشان داده شده که متوازی‌الساقین است مقدار زاویه رأس dq باشد که به سمت صفر میل می‌کند، مقدار زوایای قاعده به سمت $\frac{p}{2}$ خواهد رفت، پس $d\hat{r}$ بر $\hat{r}$ عمود است. این همان جهت بردار یکه $\hat{q}$ است. پس خواهیم داشت:

$$d\hat{r} = dq\ \hat{q} \quad \Rightarrow \quad d\hat{r}/dt = dq/dt\ \hat{q}$$

عمود بودن $d\hat{r}$ بر $\hat{r}$ را می‌شد به سادگی برحسب روابط زیر نیز نشان داد.

$$\hat{r}\ .\ \hat{r} = 1 \quad \Rightarrow \quad d\hat{r}\ .\ \hat{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\hat{r}\ .\ d\hat{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{r}\ .\ d\hat{r} = 0$$

اگر استدلال برایتان گیج کننده است می‌توانیم در مختصات دکارتی همهٔ محاسبات را بدون هیچ تصور هندسی انجام دهیم:

$$\hat{r} = (\cos q\ ,\ \sin q)$$

$$\hat{q} = (-\sin q\ ,\ \cos q)$$

$$d\hat{r} = \frac{\partial \hat{r}}{\partial r}dr + \frac{\partial \hat{r}}{\partial q}dq = 0 + \frac{\partial(\cos q\ ,\ \sin q)}{\partial q}dq = (-\sin q\ ,\ \cos q)\,dq = dq\ \hat{q}$$

$$\Rightarrow \vec{V} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{q}\ \hat{q}$$

جملهٔ $V_r = \dot{r}$ بدیهی است. این به معنای آهنگ تغییرات شعاع ذره نسبت به مبدأ است. جمله $V_q = r\dot{q}$ در مورد سرعت مماس بر شعاع صحبت می‌کند که عاملش تغییرات زاویه مختصات ذره یعنی $\frac{dq}{dt}$ است. این سرعت را سرعت زاویه‌ای[1] گویند.

---

1. angular

این سرعت بیان می‌کند که متحرک در هر لحظه به ازای واحد زمان چقدر می‌خواهد زاویـه‌اش را نسبت به محور x ها تغییر دهد.

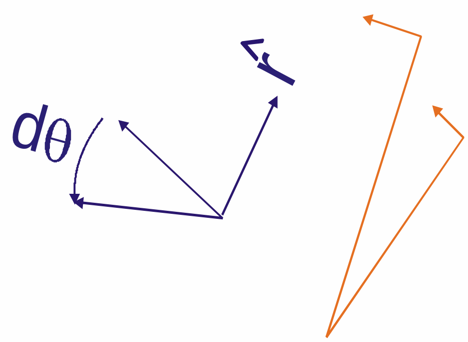
با رابطه‌های بالا چنانچه ما $r(t)$ و $q(t)$ را داشته باشیم، سرعت ذره در هر لحظه قابـل حـساب کردن خواهد بود.

امّا برویم سراغ شتاب:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{q}\,\hat{q}\right) = \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\,\frac{d\,\hat{r}}{dt} + \dot{r}\,\dot{q}\,\hat{q} + r\,\ddot{q}\,\hat{q} + r\,\dot{q}\,\frac{d\,\hat{q}}{dt} \Rightarrow$$

$$\ddot{r}\,\hat{r} + \left(2\dot{r}\,\dot{q} + r\,\ddot{q}\right)\hat{q} + r\,\dot{q}\,d\hat{q}/dt$$

این دفعه نوبت به بررسی $d\hat{q}$ است. باز مثل سابق $\hat{q}\,.\,d\,\hat{q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{q}\,.\,\hat{q} = 1$



$$\Rightarrow \quad d\,\hat{\theta} \,||\, \hat{r}$$

$$\left|d\,\hat{\theta}\right| = \left|d\,\theta\right|$$

$$\Rightarrow \quad d\,\hat{\theta} = -d\,\theta\,\hat{r}$$

در مختصات دکارتی:

$\hat{\theta} = (-\sin\theta \ , \ \cos\theta)$

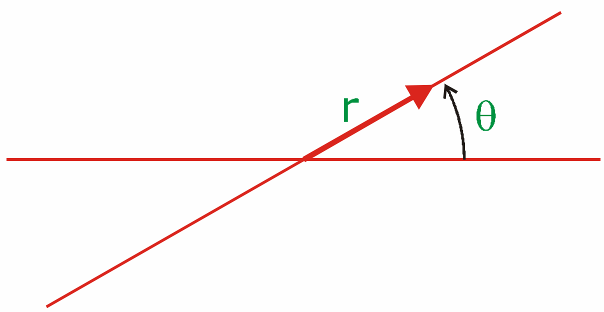
$$d\hat{\theta} = \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial r}dr + \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta}d\theta = 0 + \frac{\partial(-\sin\theta \ , \ \cos\theta)}{\partial\theta}d\theta = (-\cos\theta \ , \ -\sin\theta)\,d\theta = -d\theta \ \hat{r}$$

در کل شتاب در مختصات قطبی خواهد شد:

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

$\ddot{r}$ شتاب r است، $r\ddot{\theta}$ هم شتاب حاصل از شتاب زاویه است. می‌ماند دو جملهٔ دیگر. $-r\dot{\theta}^2$ همان نیروی مرکزگراست و به جملهٔ $2\dot{r}\dot{\theta}$ شتاب کوریولیس می‌گویند. تعبیر وجود $\ddot{r}$ بدیهی است. یعنی اگر فرض کنیم θ ثابت باشد به این معناست که متحرک روی خط راستی گذرنده از مبدأ در حال حرکت است.

در چنین حالتی $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ هر دو صفر می‌شوند.



از طرفی r اینجا مانند یک مختصهٔ یک بعدی مانند x عمل می‌کند و می‌بینید که در روابط ما در چنین حالتی

$$V = V_r = \dot{r}$$

$$a = \ddot{r}$$

که همان روابط تک بعدی است.

برای حالت $r = R$ در اصل ما تعمیم کلی حرکت دایره‌ای را داریم در اینجا $\dot{R}$ و $\ddot{R}$ صفر می‌شوند. پس:

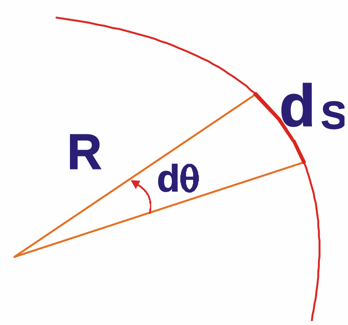
$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\hat{r} + R\ddot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\vec{V} = R\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

اگر با بخش قبلی این روابط مقایسه کنیم بدیهی است که $R\dot{\theta}^2$ همان شتاب مرکزگراست.

$$V = V_\theta = R\dot{\theta} \quad , \quad -R\dot{\theta}^2 = -\frac{(R\dot{\theta})^2}{R} = -V^2/R$$

در این حالت سرعت صرفاً مماس است و با روابط مثلثاتی نیز همخوانی دارد. مقدار کمان ds روی یک دایره برحسب زاویهٔ مقابلش $d\theta$ خواهد بود $ds = R\,d\theta$



$$\Rightarrow V = {ds}/{dt} = R\dot{\theta}$$

جملهٔ شتاب مماسی $R\ddot{\theta}$ حاصل از شتاب زاویه‌ای $\ddot{\theta}$ است. $\ddot{\theta}$ یعنی تغییرات زمانی $\dot{\theta}$ یعنی اینکه سرعت زاویه‌ای با چه آهنگی تغییر می‌کند.

شتاب را در این حالت می‌شد بطور مستقیم نیز از روی سرعت بدست آورد:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\,R\dot{\theta}\,\hat{\theta}}{dt} = R\ddot{\theta}\,\hat{\theta} + R\dot{\theta}\,\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -R\dot{\theta}^2\,\hat{r} + R\ddot{\theta}\,\hat{\theta}$$

تنها جملهٔ ناآشنای باقیمانده $2\dot{r}\dot{\theta}$ است. این شتابی است که به مشتق دوم هیچ یک از مختصه‌هـای r و θ بستگی ندارد و جالبی آن هم در همین است. این شتاب نقش جالبی در خیلی از مسائل فیزیک دارد مثلاً علت حرکت مارپیچی آب هنگام فرو رفتن در یک سوراخ بر روی زمین بخاطر وجـود همـین جملـه است.

اگر لوله‌ای داشته باشید و گلوله‌ای را داخل آن قرار دهید و لوله را با سرعت یکنواخت بچرخانیـد بطوریکه گلوله از سر آن خارج شود در این حین نیرویی را حس می‌کنید که از شتاب کوریولیس نـشأت گرفته است.

مثال. ذره‌ای بر روی دایره‌ای به شعاع R با شتاب ثابت زاویه‌ای α حرکت می‌کنـد. مکـان ذره را برحسب زمان و شتاب آن را بدست آورید.

حل.

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt}=\alpha \qquad \omega\equiv\dot{\theta} \qquad \Rightarrow \frac{d\omega}{dt}=\alpha$$

$$\Rightarrow \omega=\omega_0+\alpha t$$

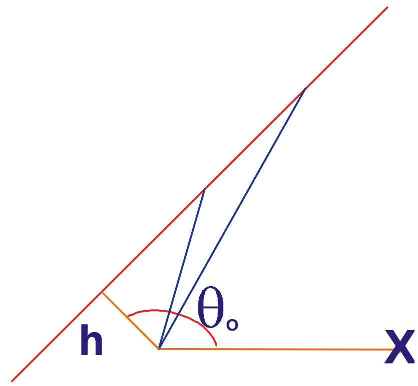
$$\Rightarrow d\theta/dt=\omega_0+\alpha t$$

$$\Rightarrow \theta=\theta_0+\omega_0 t+\alpha/2\ t^2$$

که حرکت زاویه‌ای شتاب ثابت است و معادلاتش مشابه حرکت تک بعدی شتاب ثابت است.

$$\vec{a}=\left(-R\ \dot{\theta}^2\right)\hat{r}+R\ddot{\theta}\hat{\theta}=\left(-R\left(\omega_0+\alpha t\right)^2\right)\hat{r}+R\ \alpha\ \hat{\theta}$$

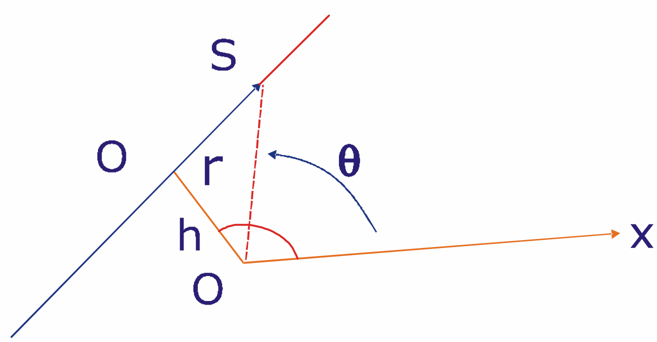
مثال. یک حرکت مستقیم الخط تک بعدی با شتاب متغیر دلخواه a در مختصات قطبی چه حالتی خواهد داشت؟



حل. چنانچه فاصله خط تا مبدأ h باشد و شعاع عمود بر خط با راستای محور xها زاویه θ_0 بسازد

می‌توان تمام نقاط روی خط را با رابطهٔ $r(\theta) = {h}/{\cos(\theta-\theta_0)}$ مشخص کرد.

چنانچه مختصهٔ تک بعدی روی خط را S بنامیم آنگاه رابطهٔ S با r و θ خواهد بود:



$$S = h\tan(\theta_0-\theta)$$

$$\Rightarrow \dot{S} = -h\sec^2(\theta_0-\theta)\,\dot{\theta} = V$$

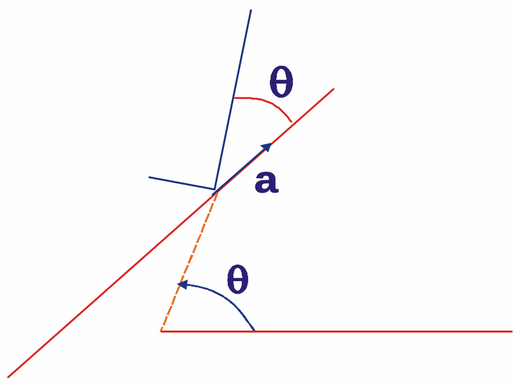
$$\ddot{S} = -h\sec^2(\theta_0-\theta)\,\ddot{\theta} + 2h\sec^2(\theta_0-\theta)\tan(\theta_0-\theta)\,\dot{\theta}^2$$

از طرفی از معادله قبلی خواهیم داشت:

$$\dot{r} = +h\sec(\theta-\theta_o)\tan(\theta-\theta_o)\dot{\theta}$$

$$\ddot{r} = h\left(\sec(\theta-\theta_o)\tan(\theta-\theta_o)\ddot{\theta} + \left(\sec(\theta-\theta_o)\tan^2(\theta-\theta_o)+\sec^3(\theta-\theta_o)\right)\dot{\theta}^2\right)$$

با حل $\dot{q}$ و $\ddot{q}$ برحسب $\dot{S}$ و $\ddot{S}$ و q می‌توان $\dot{r}$ و $\ddot{r}$ را نیز برحسب $\dot{S}$, $\ddot{S}$, q بدست آورد و در نهایت کل شتاب در مختصات قطبی برحسب $\dot{S}$, $\ddot{S}$, q بیان شود.



$$\vec{a} = \ddot{S}\left(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

$$\vec{V} = \dot{S}\left(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

کافی است بجای q برحسب S بگذاریم: $\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{S}{h}\right) + \theta_o$

مثلاً در حرکت سرعت ثابت می‌بینید که هر دوی مؤلفه‌های V_r و V_θ تابع زمانند ولی شتاب تابع زمان نمی‌شود.به هر صورت حرکت مستقیم‌الخط در مختصات قطبی دارای معادلات چندان ساده‌ای نیست همانطور که حرکت دایروی در مختصات دکارتی معادلات آسانی نداشت.

مثال. می‌توانید حرکتی مثال بزنید (یعنی r , q برحسب زمان معرفی کنید) که شتاب شعاعی و یا شتاب مماسی نداشته باشند ولی r , q در آنها متغیر با زمان و سرعتهایشان نیز چنین باشند؟

حل.

$$a_r = \left(-r\dot{\theta}^2 + \ddot{r}\right) \qquad ; \qquad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

$$a_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$$

فرض کنید $\dot{q} = w$ ثابت باشد آنگاه می‌بایست

$$\ddot{r} = r w^2 \quad \Rightarrow \quad r = r_{\pm}\, e^{\pm wt}$$

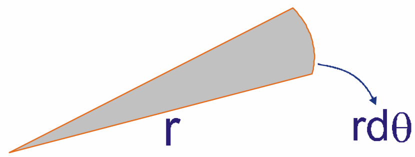
پس اگر $\dot{q} = w$ یا $q = wt + q_0$ و $r = r_0 e^{+wt}$ آنگاه با آنکه نه $\dot{q}$ و $\dot{r}$ هیچکدام صفر نیستند و نه $\ddot{r}$ هم صفر نیست ولی حرکت شتاب شعاعی ندارد. علت آن این است که روابط: $V_q \neq \int a_q\, dt \;,\; V_r \neq \int a_r\, dt$ است زیرا بعلت متغیر بودن $\hat{r}$ و $\hat{q}$ برحسب زمان نمی‌توان همچون حالت دو بعدی در مختصات دکارتی مؤلفه‌ها را بطور مجزا برای روابط سینماتیک بررسی کرد.

$$a_q = 0 \;\Rightarrow\; 2\dot{r}\dot{q} + r\ddot{q} = 0 = \frac{\left(r^2\dot{q}\right)^{\cdot}}{r} \;\Rightarrow\; \left(r^2\dot{q}\right)^{\cdot} = 0$$

$$\Rightarrow \quad r^2\dot{q} = Constant$$

وقتی شتاب مماسی نداریم همواره مقدار $r^2\dot{q}$ ثابت است امّا تعبیر هندسی این کمیت چیست؟

مساحت ds جارو شونده توسط شعاع حامل حرکت ذره در یک جابجایی بـه انـدازهٔ $dr \;,\; dq$ خواهد بود:



$$ds = r^2 \, d\theta / 2$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{C}{2} = C'$$

پس ثبات زمانی $r^2\dot{\theta}$ نتیجه خواهد داد که $\dot{S} = C'$ ثابت باشد یعنی آنکه متحرک با سرعت ثابتی مساحتها را توسط شعاعش جارو کند.

حال اگر فرض کنید $r = \frac{r_0}{\sqrt{t}}$ آنگاه $\dot{\theta} = \frac{C}{r_0^2} t \quad \Leftarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{C}{r_0^2}$ این هم حالتی که

$\ddot{\theta} \neq 0 \quad \Leftarrow \quad \frac{dV_\theta}{dt} \neq 0$ درحالیکه a_θ صفر است.

مثال. یک حرکت مارپیچی با معادلهٔ $r = r_0 + \alpha\theta$ مشخص می‌شود یعنی آنکه ذره روی چنین مسیری حرکت می‌کند. فرض کنیم سرعت زاویه‌ای ثابت (ω) و $r_0 = 0$ باشد، سرعت و شتاب را در چنین حرکتی بدست آورید. $(\theta_0 = 0)$

حل.

$$\left.\begin{array}{lll} \theta = \omega t & \Rightarrow & r = \alpha \omega t \\ \dot{\theta} = \omega & & \dot{r} = \alpha \omega \\ \ddot{\theta} = 0 & & \ddot{r} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} V_r = \alpha \omega \\ V_\theta = \alpha \omega^2 t \end{array}$$

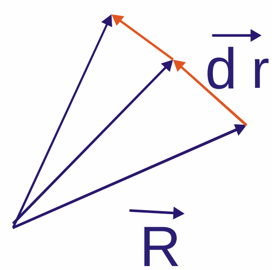
$$\Rightarrow a_r = -r\dot{\theta}^2 = -a\,\omega^3 t$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} = 2a\,\omega^2$$

این حرکت از جمله مثالهایی است که در آن شتاب کوریولیس تنها شتاب مماسی ذره است.

در آخر این بخش می‌خواهیم روابط حرکت دایروی با سرعت ثابت را با شهودی ساده برحسب مفاهیم هندسی و برداری بیان کنیم یعنی آنکه صرفاً با فرض پیکانی $\vec{R}$ که با زمان می‌چرخد می‌خواهیم شتاب این حرکت را بدست بیاوریم.

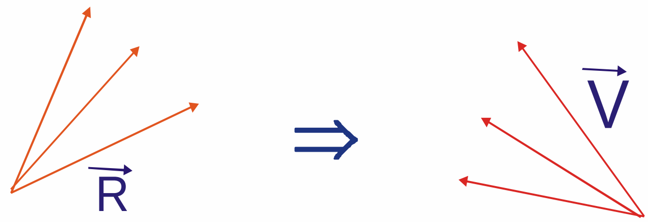
وقتی که بردار $\vec{R}$ می‌چرخد همانطور که قبلاً نشان داده بودیم باعث ایجاد $d\vec{r}$هایی می‌شود که $d\vec{r} = R\,d\theta\,\hat{\theta}$ و در نتیجه باعث بردارهای سرعت $\vec{V} = R\dot{\theta}\,\hat{\theta}$ می‌شود که با فرض سرعت ثابت بودن مسئله $\vec{V} = R\omega\hat{\theta}$ است.



چون اندازهٔ $\vec{R}$ ثابت است پس تغییراتش یعنی $\vec{V}$ صرفاً باعث تغییر در جهت $\vec{R}$ می‌شود که این تغییر جهت با آهنگ ω (زاویه بر واحد زمان) اتفاق می‌افتد.

$$V = R\omega \qquad , \qquad \vec{V}\cdot\vec{R} = 0$$

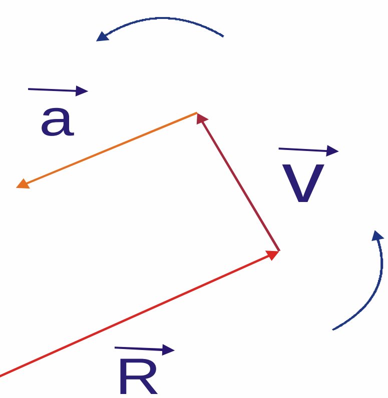
امّا در مورد خود $\vec{V}$ چه می‌توان گفت. از آنجا که $\vec{V}$ همواره عمود بر $\vec{R}$ است و مقدارش نیز ثابت می‌ماند می‌توان گفت $\vec{V}$ هم بردار ثابتی (از نظر اندازه) است که با سرعت زاویه ω می‌چرخد.



پس می‌بایست تغییرات V هم مانند R با همان فاکتور w مشخص شود پس:

$$\begin{matrix} V & = R\,w \\ \updownarrow & \updownarrow \\ a & V \end{matrix} \qquad \Rightarrow \quad a = V\,w = V\left(V/R\right) = V^2/R \;=\; R\,w^2$$

امّا جهت این شتاب چگونه است. گفتیم که چون اندازهٔ $\vec V$ ثابت است جهتش عمود بر راستای $\vec V$ است و خود $\vec V$ هم عمود بر $\vec R$ است و در نتیجه باید $\vec R \,||\, \vec a$ باشد ولی از شکلها پیداست خلاف جهت $\vec R$ را دارد یعنی مرکزگراست:



$$\Rightarrow \quad \vec a = -\frac{V^2}{R}\hat r \;=\; -\left(\frac{V}{R}\right)^2 \vec R$$