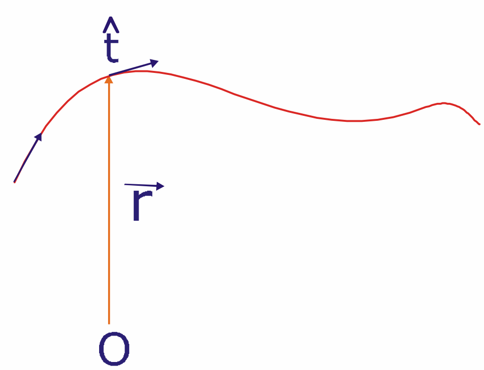
در این بخش می‌خواهیم مختصات خاصی را معرفی کنیم که در اصل مختصات مکانی نیست، بلکه برای بردارهای سرعت و شتاب قابل استفاده است. یعنی آنکه در این مختصات مکان نقاط در فضا را با مختصه‌ها تعیین نمی‌کنند. در اصل اصلاً مختصات نیست بلکه صرفاً بردارهای یکه‌ای هستند که از روی منحنی حرکت ذره در صفحه تعریف می‌شوند.

مطابق شکل منحنی دلخواهی را در نظر بگیریم.



قطعاً اگر منحنی هموار باشد در هر نقطه‌اش مماس خواهد داشت. بردار یکهٔ $\hat{t}$ را بگونه‌ای تعریف می‌کنیم که راستایش موازی با مماس باشد و سویش به سمت جهت حرکت ذره روی این منحنی. در اصل این بردار یکه همان بردار یکه سرعت ذره است. $\hat{V}=\hat{t}$ بنابراین $\vec{V}=V\,\hat{V}=V\,\hat{t}$ که V اندازهٔ سرعت ذره است. امّا این اندازه چقدر است؟

این اندازه برابر با مقدار جابجایی کوچک ds روی منحنی بر مدت زمان dt عبور از این جابجایی است.

$$V = {ds}/{dt}$$

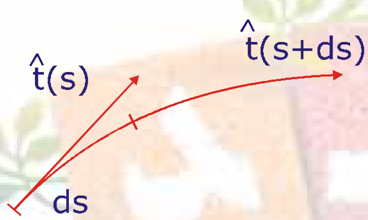
$$\Rightarrow \quad \vec{V} = \dot{S}\,\hat{t}$$

S پارامتری است که روی منحنی نشان‌دهندهٔ طول منحنی از نقطه‌ای بعنوان مبدأ است. طبیعی است که بردار مکان تمام نقاط منحنی را می‌توان تابعی از S دانست یعنی

$$\vec{r} = \vec{r}\,(S) \text{ روی منحنی} \quad \Rightarrow \vec{V} = \frac{d\,\vec{r}}{d\,t} = \frac{d\,\vec{r}}{ds}\,\dot{S} \quad \Rightarrow \quad \hat{t} = \frac{d\,\vec{r}}{ds}$$

یعنی $\hat{t}$ برداری است که از مشتق بردار مکان نسبت به پارامتر طول روی منحنی بدست می‌آید. از دیگر مفاهیم بدرد بخور در این شیوه، شعاع انحنای یک منحنی است.

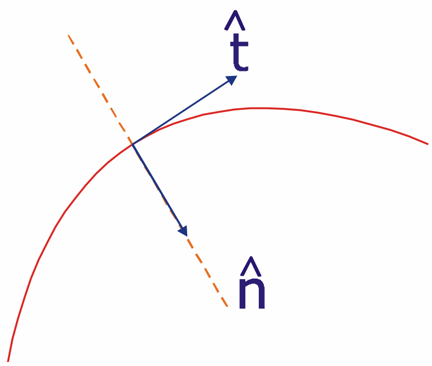
فرض کنید بر اثر جابجایی از $\vec{r}\,(s)$ به $\vec{r}\,(S+ds)$ بردار یکه مماس از $\hat{t}(s)$ بـه $\hat{t}\,(S+ds)$ تغییر یابد. چون اندازه $|\hat{t}|=1$ ثابت است این تغییر صرفاً در جهت $\hat{t}$ است. چنانچـه مقـدار ایـن تغییـر برحسب زاویه $d\gamma$ باشد آنگاه شعاع انحنای منحنی را به صورت:



$$r = \left|\frac{ds}{d\,g}\right|$$

تعریف می‌کنند. در اصل این شعاع نشان دهندهٔ فاصله مرکز انحنای منحنــی در آن نقطــه خــاص است. ما در مختصاتهای دو بعدی همواره دو بردار یکه داشته‌ایم، حال می‌ماند تعریف بردار یکه دوم.

وقتی $\hat{t}$ تعریف شود، راستای عمود بر آن نیز تعریف پس راستای بردار یکه دوم $(\hat{n})$ عمــود بــر $\hat{t}$ (ومنحنی) است. می‌ماند قرارداد سوی آن. سوی آن را به آن سمت تعریف می‌کنیم که $\hat{t}$ برحسب پــیش رفتن روی منحنی به آن سمت می‌گردد یعنی سوی آن همان سوی تقعر منحنی است.



می‌توان گفت که $\hat{n}\ .\ \hat{t}\ = 0$

$$d\hat{t} = \left|d\,g\right|\ \hat{n}$$

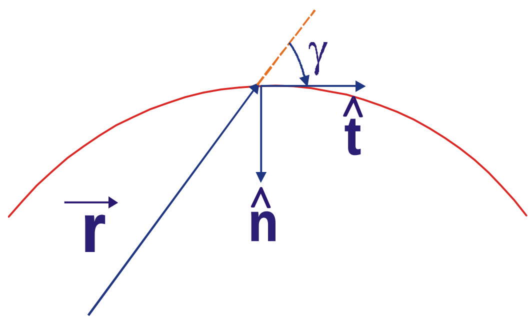
$$\Rightarrow\quad \hat{n} = \frac{d\hat{t}}{\left|d\,g\right|} = \frac{d\hat{t}}{ds}\ \left|\frac{ds}{d\,g}\right|$$

$$\Rightarrow\ \hat{n} = r\ \frac{d\hat{t}}{ds}$$

هر برداری را نسبت به هر نقطهٔ منحنی می‌توان به صورت

$$\vec{A} = A_t\,\hat{t} + A_n\,\hat{n}$$

بیان نمود. خود بردار $\vec{r}$ می‌شود:



$$\vec{r} = r\left(\cos g\;\;\hat{t}\;\;\pm\;[\sin g]\;\hat{n}\right)$$

که g زاویه $\hat{t}$ با $\vec{r}$ است. (جهت مثلثاتی مثبت است)

$+\sin g$ حالتی است که با جلو رفتن g منفی‌تر می‌شود (تقعر رو به پایین) و $-\sin g$ حالتی است

که با جلو رفتن g مثبت‌تر می‌شود (تقعر رو به بالا).

یعنی:

$$\vec{r} = r\left(\cos\gamma\,\hat{t} - \sin\gamma\;sgn\left(\frac{d\gamma}{ds}\right)\hat{n}\right)$$

گفتیم که بردار سرعت

$$\vec{V} = \dot{s}\,\hat{t}$$

ببینیم شتاب چه خواهد شد:

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{s}\,\hat{t} + \dot{s}\,\frac{d\hat{t}}{dt}$$

امّا

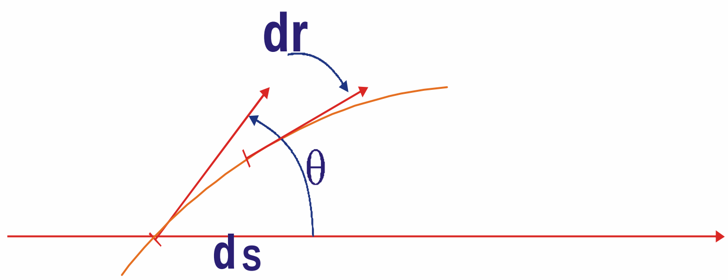
$$\frac{d\hat t}{dt}=\frac{d\hat t}{ds}\,\frac{ds}{dt} \quad \Leftarrow \quad \frac{d\hat t}{dt}=\frac{\hat n}{\rho}\,\dot s$$

$$\Rightarrow \quad \vec a=\ddot s\,\hat t+\frac{\dot s^2}{\rho}\,\hat n$$

دو جمله در شتاب موجود است $\ddot s$ که شتاب مماسی است و $\frac{\dot s^2}{\rho}$ که شتاب عمود است و مشابه جمله $\frac{V^2}{R}$ در شتاب مرکزگراست. در اصل جهت $\hat n$ را بگونه‌ای تعریف کرده‌ایم که با این شتاب موازی باشد. در حالتی که $\ddot s=0$ صرفاً شتاب عمودی را داریم. یعنی آنکه وقتی ذره با مقدار سرعت ثابت منحنی را طی می‌کند صرفاً شتاب $\vec a=\frac{V^2}{r}\,\hat n$ به آن وارد می‌شود. در مورد دایره $r=R$ است و $\hat n=-\hat r$ که همان روابط حرکت دایروی سرعت ثابت را خواهد داد. در حالتی که $\hat t$ ثابت است مسئله یک مسئله تک بعدی است که دیگر $\hat n$ معنایی ندارد. در این حالت شتاب همان $\ddot s$ خواهد بود و S همانند x برای یک حرکت تک بعدی می‌ماند.

مثال. متحرکی بر روی منحنی $y=\sin(x)$ با سرعت ثابت V حرکت می‌کند. شتاب آن چقدر است در حالتی که بیشترین شتاب را دارد؟

حل. می‌بایست ابتدا r شعاع انحنای نقاط مختلف $\sin x$ را بدست بیاوریم تا محاسبه شتاب ساده گردد.



$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$r = \left|\frac{ds}{dr}\right| \qquad dr = dq$$

$$\tan q = f'(x) \qquad \Rightarrow \qquad \sec^2 q \; dq = f''(x)\, dx$$

$$\sec^2 q = 1 + \tan^2 q = 1 + f'\left(x^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dq} = \frac{dx}{dr} = \frac{1 + f'\left(x^2\right)}{f''(x)}$$

$$r = \left|\frac{dx\sqrt{1+f'\left(x^2\right)}}{dr}\right| = \left|\frac{dx}{dr}\right| \sqrt{1+f'\left(x^2\right)} = \frac{\left(\sqrt{1+f'\left(x^2\right)}\right)^3}{\left|f''(x)\right|}$$

برای حالتی که $f(x) = \sin x$ باشد:

$$\rho(x) = \frac{\left(\sqrt{1+\cos^2 x}\right)^3}{|\sin x|} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{V^2 |\sin x|}{\left(\sqrt{1+\cos^2 x}\right)^3}$$

برای حالتی که شتاب $a = \frac{V^2}{r}$ بیشینه است می‌باید r کمینه باشد.

این حالتی است که $|\sin x|=1$, $\cos x=0$ است یعنی $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ در این حالتها $r=1$ است و شتاب بیشینه $a_m=V^2$

مقدار ماکزیمم r بینهایت است که برای حالتهای $|\sin x|=0$ یا $x=k\pi$ اتفاق می‌افتد در این حالتها $a=0$ است و کمترین مقدار خود را دارد.

این مسئله را بگونهٔ دیگری نیز می‌شود بررسی کرد.

$$y=f(x) \quad \text{و} \quad |\vec{V}|=\text{ثابت}=V$$

$$\vec{V}=(\dot{x},\dot{y})=(\dot{x}, f'\dot{x})=\dot{x}\,(1, f'(x))$$

$$\vec{A}=(\ddot{x},\ddot{y})=\left(\ddot{x}, f'\ddot{x}+f''\dot{x}^2\right)$$

$$|\vec{V}|=|\dot{x}|\sqrt{1+f'^2}=V$$

$$|\vec{A}|=\sqrt{(\ddot{x})^2+\left(f'\ddot{x}+f''\dot{x}^2\right)^2}$$

$$\left(\dot{x}\sqrt{1+f'^2}\right)^{\cdot}=\dot{V}=0 \quad = \quad \ddot{x}\sqrt{1+f'^2}+\dot{x}^2\left(\frac{2f'f''}{2\sqrt{1+f'^2}}\right)$$

$$\left(1+f'^2\right)\ddot{x}+\dot{x}^2 f'f''=0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^2 f''+\ddot{x}f' = -\frac{\ddot{x}}{f'}$$

$$\Rightarrow |\vec{A}|=|\ddot{x}|\sqrt{1+1/f'^2} = \left|\frac{\ddot{x}}{f'(x)}\right|\sqrt{1+f'^2(x)}$$

امّا خود $\ddot{x}$ را چگونه بدست بیاوریم؟ کافی است که از قیود قبلی استفاده کنیم.

$$\ddot{x} = \frac{-\dot{x}^2 f' f''}{\left(1+f'^2\right)} = \frac{\left(\pm V \big/ \sqrt{1+f'^2}\right)^2 f' f''}{\left(1+f'^2\right)} = \frac{V^2 f' f''}{\left(1+f'^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\vec{A}\right| = \frac{V^2 \left|f' f''\right|}{\left|f'\right| \left(1+f'^2\right)^2} \sqrt{1+f'^2} = \frac{V^2 \left|f''\right|}{\left(\sqrt{1+f'^2}\right)^3}$$

که همانند همان رابطهٔ $\frac{V^2}{r}$ است که r همانطور که نشان داده بودیم $r = \frac{\left(\sqrt{1+f'^2}\right)^3}{\left|f''\right|}$ بود.

مسئله کلی‌تر حالتی است که ذره با سرعت ثابت روی منحنی $F(x\,,\,y)=0$ حرکت کند.

در این حالت:

$$\dot{F} = 0 = \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} = F_x \dot{x} + F_y \dot{y}$$

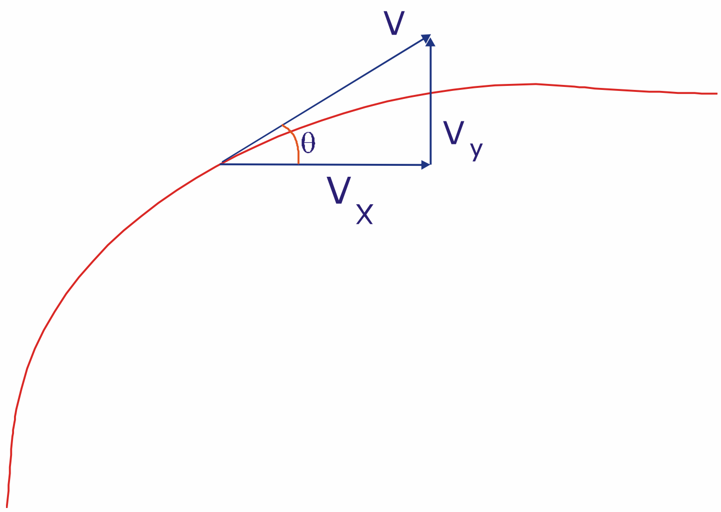
و

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V^2 = \dot{x}^2 \left(1 + \left(\frac{F_x}{F_y}\right)^2\right) \\ V^2 = \dot{y}^2 \left(\left(\frac{F_y}{F_x}\right)^2 + 1\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \pm \, V \Big/ \sqrt{1+\left(F_x / F_y\right)^2} \\ \dot{y} = \pm \, V \Big/ \sqrt{\left(F_y / F_x\right)^2 + 1} \end{cases}$$

این روابط در اصل از روی شکل بطور بدیهی درستند.



$$\tan\theta = \frac{dy}{dx}$$

$$dF = 0 = F_x\,dx + F_y\,d_y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = -\frac{F_x}{F_y} \qquad ; \quad \sin\theta = \frac{-F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} \qquad\qquad \frac{-\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow V_x = V\cos\theta = V\frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}$$

$$V_y = V\sin\theta = -V\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}$$

در مورد شتابها خواهیم داشت:

$$\dot{\left(V^2\right)}=\dot{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)}=0=2\dot{x}\ddot{x}+2\dot{y}\ddot{y}\quad\Rightarrow\quad \dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}=0$$

$$\dot{(0)}=\dot{\left(F_x\dot{x}+F_y\dot{y}\right)}=\dot{F}_x\dot{x}+F_x\ddot{x}+\dot{F}_y\dot{y}+F_y\ddot{y}$$

$$=\left(F_{xx}\dot{x}+F_{xy}\dot{y}\right)\dot{x}+\left(F_{yx}\dot{x}+F_{yy}\dot{y}\right)\dot{y}+F_x\ddot{x}+F_y\ddot{y}$$

$$=F_x\ddot{x}+F_{xx}\dot{x}^2+2F_{xy}\dot{x}\dot{y}+F_{yy}\dot{y}^2+F_y\ddot{y}$$

با حل این دو معادله خواهیم داشت:

$$\ddot{x}=\frac{F_{xx}\dot{x}^2+2F_{xy}\dot{x}\dot{y}+F_{yy}\dot{y}^2}{\dot{x}F_y-\dot{y}F_x}\dot{y}$$

$$\ddot{y}=\frac{F_{xx}\dot{x}^2+2F_{xy}\dot{x}\dot{y}+F_{yy}\dot{y}^2}{\dot{y}F_x-\dot{x}F_y}\dot{x}$$

می‌ماند جایگذاری $\dot{y}$ و $\dot{x}$ در معادلات فوق:

$$\ddot{x}=\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}Fx^2}{F_y^2+F_x^2}\;\frac{V^2}{F_x^2+F_y^2}\;(-F_x)$$

$$=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{\left(F_x^2+F_y^2\right)^2}F_xV^2$$

$$\ddot{y}=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{\left(F_x^2+F_y^2\right)^2}F_yV^2$$

می‌بینید که نسبت

$$\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}=\frac{F_y}{F_x}$$

این در حالی است که نسبت

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

و این نشان از تعامد راستاهای $\vec{a}$, $\vec{V}$ دارد که از ثابت بودن اندازهٔ $\vec{V}$ از ابتدا پیدا بود.

می‌توان مختصاتی برای حالت سه بعدی طراحی کرد که در آن یک منحنی سه بعدی مرجع تعیین بردارهای یکه باشند. در آن حالت باز $\hat{t}$ را همان $\hat{V}$ تعریف می‌کنیم یعنی $\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ و کافی است بقیه تعاریف را بطور مشابه انجام دهیم. بعلت پیچیدگی محاسبات و ... از بیان دلایل روابط زیر خودداری می‌کنیم و صرفاً به بیان آنها می‌پردازیم:

$$\hat{t} := \frac{d\vec{r}}{ds}$$

انحنا[1] $\quad k = \left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right| = \frac{1}{r}$

$$\hat{n} := r\,\frac{d\hat{t}}{ds}$$

$$\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}$$

$(\hat{t}\,,\,\hat{n}\,,\,\hat{b})$ بردارهای راستگرد دستگاه منحنی است.

که t[2]: تاب منحنی تعریف می‌شود $\frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau\,\hat{n}$

---

[1] Curvature

[2] Torsion

$$\begin{cases} d\hat t / ds = k\,\hat n \\ d\hat n / ds = -k\,\hat t + \tau\,\hat b \\ d\hat b / ds = -\tau\,\hat n \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec V = \dot S\,\hat t \\ \vec a = \ddot S\,\hat t + \overbrace{\frac{V^2}{r}}^{V^2K}\,\hat n \end{cases}$$

$$\hat b = \frac{\vec V \times \vec a}{\left|\vec V \times \vec a\right|} \quad , \quad k = \frac{\left|\vec V \times \vec a\right|}{V^3} \quad , \quad \tau = \frac{\left(\vec V \times \vec a\right) \cdot d\vec a/dt}{\left|\vec V \times \vec a\right|^2}$$