مثل همیشه ابتدا سراغ مختصات دکارتی می‌رویم.

$$\vec{r} \equiv (x\ ,\ y\ ,\ z)$$

$$\vec{V} = (\dot{x}\ ,\ \dot{y}\ ,\ \dot{z})$$

$$\vec{a} = (\ddot{x}\ ,\ \ddot{y}\ ,\ \ddot{z})$$

همانطور که قبلاً هم گفته بودیم خوبی مختصات دکارتی به ثابت بودن بردارهای یکه آن یعنی $(\hat{i}\ ,\ \hat{j}\ ,\ \hat{k})$ است و در مسائلی که با جهت‌گیریهای ثابت مواجه هستیم مفید می‌شود.

مثال. ذره‌ای تحت شتابی است که از رابطهٔ $\vec{a} = \vec{V} \times \vec{C}$ بدست می‌آید که $\vec{C}$ بردار ثابتی است. (این شتاب ذرات باردار در یک میدان مغناطیسی یکنواخت است) حرکت کلی که این نوع شتاب ایجاد می‌کند چگونه است؟

حل.

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V} \times \vec{C}$$

برای سادگی جهت‌گیری مختصاتمان را بگونه‌ای می‌گیریم که $\vec{C} = c\hat{k}$ شود:

$$\begin{cases} \dot{V}_x = (\vec{V} \times \hat{k})_x\, C \\ \dot{V}_y = (\vec{V} \times \hat{k})_y\, C \\ \dot{V}_z = (\vec{V} \times \hat{k})_z\, C \end{cases}$$

بطور بدیهی $(\hat{k}\ .\vec{V} \times \hat{k}) = 0$ است و مؤلفه‌ای در راستای z ندارد پس

شبکه ملی مدارس ایران – شبکه رشد
Olympiad.roshd.ir

$\dot{V}_z = 0 \quad \Rightarrow V_z = V_{z0}$:ثابت

می‌ماند دو مختصهٔ دیگر

$$\vec{V} \times \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ V_x & V_y & V_z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\hat{j}\,V_x + \hat{i}\,V_y = \left(V_y \;\; , -V_x\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{V}_x = C\,V_y & \Rightarrow \quad \ddot{V}_x = C\,\dot{V}_y \\ \\ \dot{V}_y = -C\,V_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{V}_y = \frac{\ddot{V}_x}{C} = -C\,V_x \quad \Rightarrow \quad \ddot{V}_x + C^2\,V_x = 0$$

جواب این معادله به فرم $V_x = V_m \, sin \, (C\,t + \varphi)$ است.

$$\dot{V}_y = -CV_x = -C\,V_m \, sin\,(C\,t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \quad V_y - V_{0y} = V_m \, cos \, (C\,t + \varphi) \, \Big]_0^t = V_m \left(cos \, (C\,t + \varphi) - cos \, \varphi\right)$$

برای بدست آوردن مکان برحسب زمان کافی است از سرعتها نسبت به زمان مشتق بگیریم:

$$Z = Z_0 + V_z t \qquad\qquad y = y_0 + \int_0^t V_y \, dt \qquad , \qquad x = x_0 + \int_0^t V_x \, dt$$

منتها قبل از آن بهتر است در مورد V_m, φ و نحوهٔ بدست آمدن آنها صحبت کنیم.

این دو پارامتر ضرایبی هستند که از شرایط اولیه سرعتها بدست می‌آیند:

می‌توان دید که

$$V_{0x} = V_m \, sin\varphi$$

$$V_{0y} = V_m \, cos \, \varphi$$

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

از اینجا پیداست که

$$V_m = \sqrt{V_{0x}^{\ 2} + V_{0y}^{\ 2}}$$

$$\tan\varphi = V_{0x} \big/ V_{0y}$$

حال برویم سراغ بدست آوردن x , y

$$x = x_0 + \int_0^t V_m \sin(Ct + j)\,dt = x_0 + \frac{V_m}{C}\left(\cos j - \cos(Ct + j)\right)$$

$$y = y_0 + \int_0^t V_m \cos(Ct + j)\,dt = y_0 + \frac{V_m}{C}\left(\sin(Ct + j) - \sin j\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + V_{0y}/C - \dfrac{V_m}{C}\cos(Ct + j) \\ y = y_0 - V_{0x}/C + \dfrac{V_m}{C}\sin(Ct + j_0) \\ z = z_0 + V_z t \end{cases}$$

امّا این چه شکل هندسی دارد.

چنانچه در یک z ثابت به x و y نگاه کنیم و برای سادگی تـصور $x_0 = -\dfrac{V_{0y}}{C}$, $y_0 = \dfrac{V_{0x}}{C}$

آنگاه

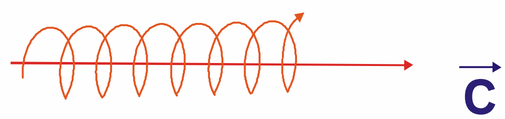
$$\begin{cases} x = A\sin(\theta) \\ y = B\cos(\theta) \end{cases}$$

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
رشد
Olympiad.roshd.ir

که $\theta = Ct + \varphi \quad , \quad A = \frac{V_m}{C}$. این معادلات نقاط دایره‌ای را در مختصات دکارتی معین می‌کنند.

پس تصویر xy حرکت ذره دایره است. اگر این دایره را به ازای z های مختلف کش بدهیم شــکلی فنــری (مارپیچی)[1] ایجاد خواهد شد.

مارپیچی که در امتداد $\hat{k}$ (همان $\check{C}$) کش آمده است.



مسائل دیگر را نیز می‌توان در مختصات دکارتی (سه بعدی) بررسی کرد، منتها معمولاً جزء مسائل عمومی نیستند. اکثر مسائل عمومی بعلت تقارنهای خاص جهان در مختصات کروی بررسی می‌شوند کــه موضوع مورد بحث بخشهای آینده است.

---

[1] Helix

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران

Olympiad.roshd.ir