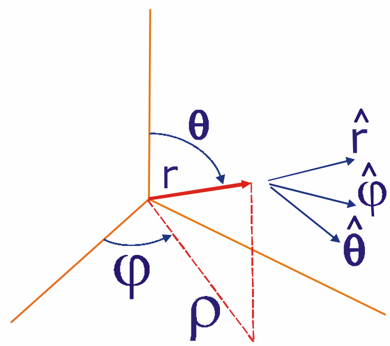
در فصل "حساب برداری" بخش مختصات کروی به میزان لازم در مورد نحوهٔ بیان این مختصات و تبدیلات آن با مختصاتهای دیگر صحبت شد. در ذیل صرفاً مروری بر آنها می‌کنیم.



این مختصات مکان نقاط را با $(r\ ,\ \theta\ ,\ \varphi)$ نمایش می‌دهد.

بردار مکان در آن به فرم $\vec{V} = r\ \hat{r}$ خواهد بود. تبدیلات آن با مختصات دکارتی به صورت

$$z = r\ \cos\theta$$

$$y = r\sin\theta\ \sin\varphi \qquad\qquad \rho = r\ \sin\theta$$

$$x = r\ \sin\theta\cos\varphi$$

بردارهای یکه آن در مختصات دکارتی به فرم زیرند:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \left(\frac{x}{r}\ ,\ \frac{y}{r}\ ,\ \frac{z}{r}\right) = (\cos\varphi\sin\theta\ ,\ \sin\varphi\sin\theta\ ,\ \cos\theta)$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\ \hat{k} + \cos\theta\left(\cos\ \varphi\ \hat{i} + \sin\varphi\ \hat{j}\right) = (\cos\theta\cos\varphi\ ,\ \cos\theta\sin\varphi\ ,\ -\sin\theta)$$

$$\hat{\varphi} = (-\sin\varphi\ ,\ \cos\varphi\ ,\ 0)$$

این بردارهای یکه در اصل از روابط زیر بدست آمده‌اند:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\, d r + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} d q + \frac{\partial \vec{r}}{\partial j} d j$$

$$\hat{r} := \frac{\partial \vec{r} / \partial r}{\left| \partial \vec{r} / \partial r \right|} \qquad\qquad h_r = \left| \partial \vec{r} / \partial r \right|$$

$$\hat{q} := \frac{\partial \vec{r} / \partial q}{\left| \partial \vec{r} / \partial q \right|} \qquad\qquad h_q = \left| \partial \vec{r} / \partial q \right|$$

$$\hat{j} := \frac{\partial \vec{r} / \partial j}{\left| \partial \vec{r} / \partial j \right|} \qquad\qquad h_j = \left| \partial \vec{r} / \partial j \right|$$

$$\Rightarrow\ \hat{r} = \frac{\partial \vec{r} / \partial r}{h_r} \quad , \quad \hat{q} = \frac{\partial \vec{r} / \partial q}{h_q} \quad , \quad \hat{j} = \frac{\partial \vec{r} / \partial j}{h_j}$$

$$\Rightarrow\ d\vec{r} = h_r\, d r\ \hat{r} + h_q\, d q\ \hat{q} + h_j\, d j\ \hat{j}$$

اما بیایید ببینیم مقادیر h_φ , h_θ , h_r چه خواهند بود:

$$h_r = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = \left| (\partial_r x\ , \partial_r y\ , \partial_r z) \right| = \left| (\sin q\ \cos j\ , \sin q\ \sin j\ , \cos q) \right| = 1 \qquad r \geq 0$$

$$h_q = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \right| = \left| (\partial_q x\ , \partial_q y\ , \partial_q z) \right| = \left| (\cos q\ \cos j\ , -\cos q \sin j\ , -\sin q)\, r \right| = r$$

$$h_j = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial j} \right| = \left| (\partial_j x\ , \partial_j y\ , \partial_j z) \right| = \left| r\,(-\sin q\ \sin j\ , \sin q \cos j\ , 0) \right| = \left| r \sin q \right| = r \sin q$$

$r \geq 0\ ,\ p \geq q \geq 0$

$$\Rightarrow d\vec{r} = d r\ \hat{r} + r\, d\theta\, \hat{\theta} + r \sin\theta\, d\varphi\ \hat{\varphi}$$

اگر به حاصلضرب $\hat{r}$ و $\hat{q}$ و $\hat{j}$ دقت کنید همه صفرخواهند شد پس بر هم متعامدند:

$$\hat{r}\ .\ \hat{\theta} = \hat{r}\ .\ \hat{\varphi} = \hat{\theta}\ .\ \hat{\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \left| d\vec{r} \right|^2 = d\vec{r}\ .\ d\vec{r} = d r^2 + (r\, d\theta)^2 + (r \sin\theta)^2$$

بعد از این مرور طولانی بهتر است سراغ سرعت و شتاب و ... برویم.

$$\vec r = r\ \hat r$$

$$\vec V = \frac{d\,\vec r}{d\,t} = \dot r\ \hat r\ + r\,\frac{d\,\hat r}{d\,t}$$

مانند حالت مختصات قطبی باید $d\,\hat r$ را حساب کنیم. بیایید d هم بردارهای یکه را حساب کنیم

و در نهایت در روابط آتی نیز از آنها استفاده کنیم.

$$d\,\hat r = \frac{\partial \hat r}{\partial r} d\,r + \frac{\partial \hat r}{\partial \theta}\,d\theta + \frac{\partial \hat r}{\partial \varphi}\,d\,\varphi = 0 + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \hat r}{\partial \theta}\,d\,\theta + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \vec r}{\partial \varphi}\,d\,\varphi$$

$$\Rightarrow \quad d\,\hat r = d\,\theta\ \hat\theta\ + \sin\theta\, d\,\varphi\ \hat\varphi$$

$$d\,\hat\theta = \frac{\partial \hat\theta}{\partial r}\,dr\ + \frac{\partial \hat\theta}{\partial \theta}\,d\,\theta\ + \frac{\partial \hat\theta}{\partial \varphi}\,d\,\varphi$$

هیچ یک از بردارهای یکه با تغییر r تغییر نمی‌کنند پس همواره اولین جمله صفر است:

$$d\,\hat\theta = 0 + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\cos\varphi\ ,\ \cos\theta\,\Sigma\,\varphi\ ,\ -\Sigma\,\theta\right)\,d\,\theta$$

$$+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\cos\theta\cos\varphi\ ,\ \cos\theta\,\Sigma\,\varphi\ ,\ -\Sigma\,\theta\right)\,d\,\varphi$$

$$= \left(-\Sigma\,\theta\cos\varphi\ ,\ -\Sigma\,\theta\ \Sigma\,\varphi\ ,\ -\cos\theta\right)\,d\,\theta\ +\ \left(-\cos\theta\,\Sigma\,\varphi\ ,\ \cos\theta\cos\varphi\ ,\ 0\right)\,d\,\varphi$$

$$= -d\,\theta\ \hat r\ +\ \cos\theta\ d\,\varphi\ \hat\varphi$$

$$d\,\hat j = 0 + \frac{\partial}{\partial q}\left(-\sin j\ ,\ \cos j\ ,\ 0\right)\,d\,q\ + \frac{\partial}{\partial\,j}\left(-\Sigma\,j\ ,\ \cos j\ ,\ 0\right)\,d\,j$$

$$= \left(-\cos j\ ,\ -\sin j\ ,\ 0\right)\,d\,j\ = -\left(\cos q\ \hat q\ + \sin q\ \hat r\right)\,d\,j$$

پس سرعت خواهد شد:

$$\vec{V} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\hat{r}} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{q}\,\hat{q} + r\,\sin q\,\dot{j}\,\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\,\dot{\hat{r}} + \dot{r}\,\dot{q}\,\hat{q} + r\ddot{q}\,\hat{q} + r\,\dot{q}\,\dot{\hat{q}} + \dot{r}\sin q\,\dot{j}\,\hat{j} + r\cos q\,\dot{q}\,\dot{j}\,\hat{j}$$

$$+ r\sin q\,\ddot{j}\,\hat{j} + r\sin q\,\dot{j}\,\dot{\hat{j}}$$

$$= \left(\ddot{r} - r\,\dot{q}^2 - r\,\dot{j}^2\,\sin^2 q\right)\hat{r} + \left(r\ddot{q} + 2\dot{r}\dot{q} - r\,\dot{j}^2\,\sin q\,\cos q\right)\hat{q}$$

$$+\left(r\,\ddot{j}\,\sin q + 2\dot{r}\,\dot{j}\,\sin q + 2r\,\dot{q}\,\dot{j}\,\cos q\right)\hat{j}$$

اگر دقت کرده باشید چنانچه $q = \frac{p}{2}$ قرار دهید و $\dot{q}$ و $\ddot{q}$ را صفر در نظر بگیرید همان روابط مختصات قطبی برای $(r\ ,\ j)$ بدست خواهند آمد.

بیان مثال در سطح متعارف برای مختصات کروی کار ساده‌ای نیست بخاطر همین از این بخش صرفنظر می‌کنیم و مثالی نمی‌زنیم.