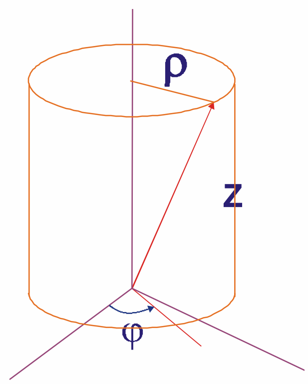
در فصل "حساب‌برداری" بخش مختصات استوانه‌ای به تفصیل در مورد این مختصات صحبت شد.

آنچه در ابتدا خواهم گفت مطالبی در جهت یادآوری است.

در دستگاه استوانه‌ای مختصات هر نقطه با سه تایی $(r\ ,\ j\ ,\ Z)$ تعیین می‌شود بردارهای یکه آن از روابط زیر تعریف خواهند شد:



$$\hat{r} = \frac{\partial \vec{r} / \partial r}{h_r}$$

$$\hat{j} = \frac{\partial \vec{r} / \partial j}{h_j} \qquad \text{که} \qquad h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} \right|$$

$$\hat{Z} = \frac{\partial \vec{r} / \partial Z}{h_Z}$$

بردار مکان در این مختصات

$$\vec{r} = r\ \hat{r}\ + Z\,\hat{k}$$

می‌باشد. تبدیل‌های این مختصات با مختصات دکارتی به فرم مقابل است:

$x = \rho \, cos\varphi$

$y = \rho \, sin\varphi$

$Z = Z$

از این روابط می‌توان برای بدست آوردن بردارهای یکه این مختصات استفاده کرد.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial \left(r\cos j \ , r\sin j \ , Z \right)}{\partial \ r} = \left(cos j \ , sin j \ , 0 \right)$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{r} = \left(cos \ j \ , sin j \ , 0 \right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial j} = \frac{\partial \left(r\cos j \ , r\sin j \ , Z \right)}{\partial \ j} = r \ \left(-sin \ j \ , cos \ j \ , 0 \right)$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial j} \right| = r \qquad \Rightarrow \qquad \hat{j} = \left(-sin \ j \ , cos \ j \ , 0 \right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial Z} = \frac{\partial \left(r\cos j \ , r\sin j \ , Z \right)}{\partial Z} = \left(0 \ , 0 \ , 1 \right)$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial Z} \right| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{Z} = \left(0 \ , 0 \ , 1 \right) = \hat{k}$$

$$h_r = h_Z = 1 \qquad , \qquad h_j = r$$

$$\Rightarrow \qquad d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} d\,r + \frac{\partial \vec{r}}{\partial j} d\,j + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz = d \ r \ \hat{r} + r \ d\,j \ \hat{j} + d\,z\hat{k}$$

بهتر است مشتق بردارهای یکه را هم بدست آوریم چون می‌دانیم که برای بدست آوردن سرعت و شتاب بدرد خواهند خورد. برای اینکه می‌توان از بردارهای یکه مستقیماً مشتق گرفت (در مختصات دکارتی)

$$d\hat r = \frac{\partial \hat r}{\partial r}dr + \frac{\partial \hat r}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial \hat r}{\partial z}dz = 0 + \frac{\partial(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)}{\partial \varphi}d\varphi + 0$$

$$= (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)d\varphi = d\varphi\,\hat\varphi$$

$$d\hat\varphi = \frac{\partial\hat\varphi}{d r}dr + \frac{\partial\hat\varphi}{\partial\varphi}d\varphi + \frac{\partial\hat\varphi}{\partial z}dz = 0 + \frac{\partial(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)}{\partial\varphi}d\varphi + 0$$

$$= (-\cos\varphi, -\sin\varphi, 0)d\varphi = -d\varphi\,\hat r$$

$$d\hat z = d\hat k = 0$$

برای بدست آوردن سرعت کافی است از $\vec r$ در این مختصات نسبت به زمان مشتق بگیریم:

$$\vec V = \frac{d\vec r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\hat r + z\hat k\right) = \dot r\hat r + r\dot{\hat r} + \dot z\hat k$$

$$= \dot r\hat r + \dot\varphi\hat\varphi r + \dot z k = \dot r\hat r + (r\dot\varphi)\hat\varphi + \dot z\hat k$$

کاملاً مشابه مختصات قطبی است فقط یک سرعت در راستای سوم Z اضافه شده است. برای شتاب خواهیم داشت:

$$\vec a = \frac{d\vec V}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot r\hat r + r\dot\varphi\hat\varphi + \dot z\hat k\right)$$

$$= \ddot r\hat r + \dot r\dot{\hat r} + \dot r\dot\varphi\hat\varphi + r\ddot\varphi\hat\varphi + r\dot\varphi\dot{\hat\varphi} + \ddot z\hat k$$

$$= \ddot r\hat r + \dot r\dot\varphi\hat\varphi + \dot r\dot\varphi\hat\varphi + r\ddot\varphi\hat\varphi - r\dot\varphi^2\hat r + \ddot z\hat k$$

$$= \left(\ddot r - r\dot\varphi^2\right)\hat r + \left(2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi\right)\hat\varphi + \ddot z\hat k$$

که باز هم مشابه مختصات قطبی است، با این فرق که $\ddot z\hat k$ برای بعد سوم اضافه شده است.

مثال. ذره‌ای تحت شتاب $\vec a = \vec V \times \vec C$ قرار دارد که $\vec C = c\hat k$ می‌باشد. معادلات حرکت ذره را بیابید.

حل. این مسأله را در بخش مختصات 3 بعدی دکارتی حل کردیم حال می‌خـواهیم در مختـصات استوانه‌ای حل کنیم، تا ببینیم آیا تفاوت می‌کند یا خیر؟

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} = \left(\dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\varphi}\,\hat{j} + \dot{z}\,\hat{k}\right)\times c\,\hat{k}$$

$$= c\left(-\dot{r}\,\hat{j} + r\dot{\varphi}\,\hat{r}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = -c\,\dot{r} \\ \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = c\,r\dot{\varphi} \qquad \text{ثابت} \\ \ddot{z} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \dot{z} = V_Z \ : \text{ثابت} \end{cases}$$

در معادلهٔ اول

$$2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho^2\ddot{\varphi} = -c\,\rho\dot{\rho}$$

$$\dot{\left(\rho^2\dot{\varphi}\right)} = -c\,\rho\dot{\rho} = -c\,\rho\frac{d\rho}{dt}$$

$$\Rightarrow \rho^2\dot{\varphi} = \frac{-c}{2}\int\frac{d\rho^2}{dt}\,dt = -\frac{c}{2}\int d\rho^2$$

$$= -\frac{c}{2}\rho^2 + k$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = -\frac{c}{2} + \frac{k}{\rho^2}$$

$$\ddot{\rho} - \rho\left(\frac{k}{\rho^2} - \frac{c}{2}\right)^2 = c\,\rho\left(\frac{k}{\rho^2} - \frac{c}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{\rho} - \frac{k^2}{\rho^2} + \frac{kc}{\rho} - \rho \frac{c^2}{4} = \frac{ck}{\rho} - \frac{c^2}{2}\rho$$

$$\Rightarrow \ddot{\rho} + \frac{c^2}{4}\rho - \frac{k^2}{\rho^3} = 0$$

$$\frac{d\dot{\rho}}{dt} = \frac{d\dot{\rho}}{d\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\dot{\rho}}{d\rho}\dot{\rho} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\rho}^2}{d\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{d\dot{\rho}^2}{d\rho} = 2\frac{K^2}{\rho^3} - \frac{c^2}{2}\rho$$

$$\Rightarrow \dot{\rho}^2 = L - \frac{K^2}{\rho^2} - \frac{c^2}{4}\rho^2$$

گرفتن انتگرال بعدی از این رابطه کار مشکلی است زیرا رادیکال عبارت سمت راست در مخـرج ظاهر می‌شود.

بیایید به معادله اول برگردیم و جواب را حدس بزنیم $\ddot{r} + \frac{c^2}{4}r - \frac{K^2}{r^3} = 0$ **ساده‌ترین حـدس**

$r = R$ **ثابت است که در این حالت** $\ddot{r} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{C^2}{4}R = \frac{K^2}{R^3} \Rightarrow \quad R^2 = 2\frac{K}{C} \Rightarrow R = \sqrt{2}\sqrt{\frac{K}{C}}$$

که با در نظر گرفتن R **به مقدار مقابل مشکلمان حل می‌شود. اما**

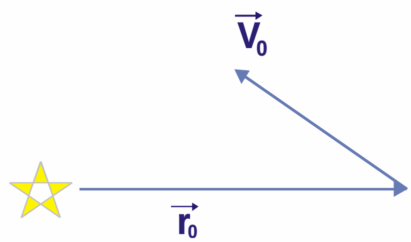
$$\dot{\theta} = -\frac{c}{2} + \frac{K}{R^2} = -\frac{c}{2} - \frac{c}{2} = -c$$

که حرکتی با سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot{\theta} = -c$ **و شعاع ثابت** $R = \sqrt{2}\sqrt{\frac{K}{C}}$ **است.**

مقدار K از شرایط اولیه سرعت‌ها بدست می‌آید. نتیجه همانند حالت دکارتی منتها با چند اختلاف جزیی که بعلت تفاوت در قراردادها ایجاد شده است.

مثال. شتابی که سیاره‌ای تحت گرانش خورشید می‌گیرد از رابطه $\vec{a} = -\frac{K}{r^2}\hat{r}$ بدست می‌آید. معادله مسیر حرکت سیارات را از روی این شتاب بدست آورید.

حل. فرض کنید در لحظه‌ای که $(t = 0)$ در مکان $\vec{r}_0$ و با سرعت $\vec{V}_0$ نسبت به خورشید حرکت می‌کند. در این حالت اگر مختصات استوانه‌ای خود را منطبق بر خورشید و صفحهٔ گذرنده از $\vec{r}_0$ و $\vec{V}_0$ بکنیم آنگاه:



$$\vec{r}_0 = \rho_0\ \hat{\rho}_0$$

$$\vec{V}_0 = V_{0\rho}\ \hat{\rho}_0 + V_{0\varphi}\ \hat{\varphi}_0\ + 0$$

مؤلفه V_{0Z} در دستگاه صفر خواهد شد $\qquad V_{0Z} = 0$

اما مؤلفه‌های شتاب چگونه‌اند.

$$\vec{a}_0 = -\frac{K}{r_0^2}\ \hat{r}_0 = \left(\ddot{\rho}_0 - r_0\ \dot{\varphi}_0^2\right)\ \hat{r} + \left(2\dot{r}_0\ \dot{\varphi}_0 + r_0\ddot{\varphi}_0\right)\ \hat{j}\ + \ddot{z}_0\ \hat{k}$$

در این لحظه $\ddot{z}_0 = 0 \Leftarrow$ سرعت V_{0Z} تغییر نخواهد کرد.

وقتی سرعت V_{0z} تغییر نکند به این معناست که بعد از حرکت چون $z_0 = 0$ بعداً هم z همان می‌ماند یعنی چون از ابتدا در جهتz حرکت نمی‌کند و شتابش هم در آن راستا نمی‌شود همواره در صفحه $(r\ ,\ j)$ باقی خواهد ماند.

با این ترفند مسأله ما به یک مسأله دو بعدی در صفحه تبدیل شده که $(r\ \ ,\ j)$ عملاً نقش مختصات قطبی را بازی می‌کنند. خوب معادلات حرکت چه‌ها هستند؟

$$\begin{cases} 2\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi} = 0 \\ \ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 = -\dfrac{K}{r^2} \end{cases}$$

همان کلکی را که قبلاً زده‌ام اینجا نیز می‌زنم و $\dot{\varphi}$ را حذف می‌کنم و صرفاً یک معادله دیفرانسیل برای r می‌سازم:

$$2\,\rho\,\dot{\rho}\,\dot{\varphi} + \rho^2\,\ddot{\varphi} = 0 \ = \ \dot{\left(\rho^2\dot{\varphi}\right)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \rho^2\,\dot{\varphi} = \boldsymbol{l} \quad \text{ثابت} \qquad \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\boldsymbol{l}}{\rho^2}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\rho} - \rho\left(\frac{\boldsymbol{l}}{\rho^2}\right)^2 = -\frac{K}{\rho^2}$$

$$\Rightarrow \ \ddot{\rho} - \frac{\boldsymbol{l}^2}{\rho^3} + \frac{K}{\rho^2} = 0$$

$u = \dfrac{1}{r}$ تعریف می‌کنیم:

$$\dot{\theta} = \boldsymbol{l}\; u^2$$

$$\dot{r} = \frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{d\,t} = -\frac{1}{u^2}\;\frac{d\,u}{d\,t} = -\frac{1}{u^2}\;\frac{d\,u}{d\,j}\;\dot{\theta} = -\frac{1}{u^2 r^2}\;\boldsymbol{l}\;\frac{d\,u}{d\,j} = -\boldsymbol{l}\;\frac{d\,u}{d\,j}$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{d\,t}\left(-\boldsymbol{l}\;\frac{d\,u}{d\,\varphi}\right) = -\boldsymbol{l}\;\frac{d}{d\,\varphi}\left(\frac{d\,u}{d\,\varphi}\right)\times\frac{d\,\varphi}{d\,\theta} = -\boldsymbol{l}^{\,2}\,u^2\;\frac{d^2 u}{d\,\varphi^2}$$

$$\xRightarrow{\text{معادله اصلی}}\quad -\boldsymbol{l}^{\,2}u^2\;\frac{d^2u}{d\,\varphi^2} - \boldsymbol{l}^{\,2}\,u^3 + K\,u^2 = 0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{d^2u}{d\,\varphi^2} - \frac{K}{\boldsymbol{l}^{\,2}} + u = 0$$

جواب این معادله

$$u\,(\varphi) = A\;cos\,\varphi + B\;\;sin\varphi\;+\frac{K}{\boldsymbol{l}^{\,2}}$$

می‌باشد.

اگر جهت‌گیری اولیه محور $O\,x$ را بگونه‌ای در نظر بگیریم که $B=0$ شود آنگاه

$$u\,(\varphi) = \frac{1}{\rho(\varphi)} = A\;cos\;\varphi + \frac{K}{\boldsymbol{l}^{\,2}}$$

$$\Rightarrow\;\rho(\varphi) = \frac{1}{A\,cos\varphi + \dfrac{K}{\boldsymbol{l}^{\,2}}}$$

از بخش مقاطع مخروطی می‌دانید که این معادله نشان‌گر یک مقطع مخروطی است.

می‌توان معادله را به فرم زیر مرتب کرد:

$$\rho = \frac{\boldsymbol{l}^{2}/K}{1+\left(A\,\boldsymbol{l}^{2}/K\right)\cos\varphi} = \frac{e\,\rho}{1+e\ \cos\theta}$$

که $\mathbf{l}$ همان خروج از مرکز در مقاطع مخروطی است و r فاصلهٔ کانون تا خط هادی.

می‌دانید که $e>1$: هذلولی ، $e=1$: سهمی ، $e<1$: بیضی و $e=0$ دایره را خواهد داد.

خروج از مرکز زمین حدود $e \cong 0/017$ است.