## اصطکاک شاره‌ها و حرکت پرتابی:

قطره‌های باران از ابرهایی سقوط می‌کنند که ارتفاع $(h)$ آنها از سطح زمین در حدود $2km$ است. با استفاده از معادله سقوط آزاد اجسام، انتظار داریم که این قطره‌ها با سرعت $v=\sqrt{2gh}\approx 200m/s$، یا در حدود $440mi/h$ به زمین برخورد کنند. برخورد پرتابه‌ای چنین سریع با آدمیزاد، حتی اگر این پرتابه قطره باران باشد، مرگ‌آور است؛ پس قطره‌های باران خیلی کندتر از اینها حرکت می‌کنند و معلوم است که در جایی از محاسبات خطا کرده‌ایم.

اشکال کار اینجاست که اثر نیروی مقاومت هوا بر قطره افتان را نادیده گرفته‌ایم. این نیرو، نیروی اصطکاک شاره است که بر اجسامی که در آن حرکت می‌کنند وارد می‌شود. چنین نیروهایی، در موارد گوناگون، آثار مهمی دارند؛ مثلاً در اثر این نیرو توپ بیسبال به مقدار قابل ملاحظه‌ای از مسیر ایده‌آل بدون اصطکاک منحرف می‌شود؛ این نیرو سرعت اسکی‌باز را هم کم می‌کند و اسکی‌باز بدن خودش را در چنان حالتی قرار می‌دهد که اثر آن را کم کند؛ در طراحی هواپیما و کشتی هم باید اثر این نیروها را در نظر گرفت. از دید اجسام افتان، از قطره باران گرفته تا چترباز، نیروی اصطکاک شاره‌ها نمی‌گذارد که سرعت بطور نامحدود زیاد شود، بلکه یک سرعت بیشینه، یا حد، تعیین می‌کند که جسم در حال سقوط نمی‌تواند از آن تندتر حرکت کند.

یکی از ویژگیهای خاص نیروی اصطکاک شاره‌ها آن است که این نیرو به سرعت بستگی دارد: هر چه جسم سریعتر حرکت کند، نیروی اصطکاک هم بیشتر می‌شود. بنابراین، برای تحلیل سینماتیک مسئله باید از روشهای انتگرال استفاده کرد.

اگر نیرو و در نتیجه شتاب، تابع سرعت باشد، برای نیروهای وابسته به زمان را باید قـدری تغییـر داد. از $a = dv/dt$ شروع می‌کنیم، امّا در اینجا $a$ تابع سرعت، یعنی $a(v)$ است:

$$a(v) = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{a(v)} = dt$$

از این رابطه می‌توان مستقیماً انتگرال گرفت:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a(v)} = \int_{0}^{t} dt = t \qquad (1)$$

طرف چپ معادله (1) تابعی از $v$ است؛ پس معادله (1) عمـلاً $t$ را بـه صـورت تـابعی از $v$، $t(v)$، بدست می‌دهد. البته اغلب می‌توانیم نتیجه را "معکوس" کنیم و $v(t)$ را بدست بیاوریم که عموماً بـرای محاسبات مفیدتر است.

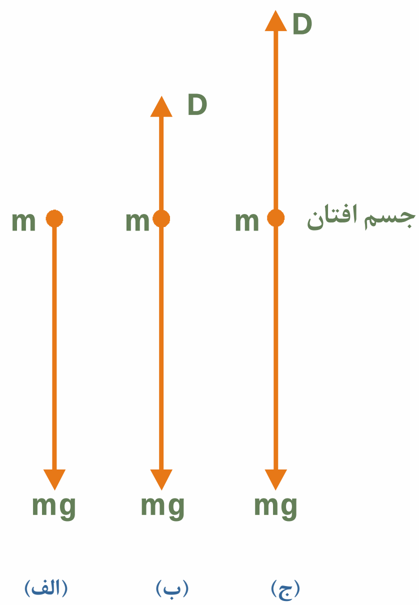
مثال. فرض کنید جسمی به جرم $m$ در هوا سقوط می‌کند و نیروی مقاومت $D$ وارد بـر آن بطـور خطی با سرعت زیاد می‌شود.

$$D = bv$$

و این نیرو همواره در خلاف جهت حرکت سرعت جسم است. ثابت $b$ به خواص جسم (مثلاً اندازه و شکل آن) و همچنین به خواص شاره (به ویژه چگالی آن) بستگی دارد. با این فرض که جرم $m$ از حالت سکون شروع به حرکت کرده باشد، سرعت آن برحسب زمان، یعنی $v(t)$ را پیدا کنید.

حل. شکل $A$ نمودار جسم- آزاد را نشان می‌دهد؛ این نمودار با گذشت زمان عوض می‌شود زیـرا $D$ همراه با $v$ تغییر می‌کند. هنگامی که جسم رها می‌شـود $D$ صـفر اسـت (زیـرا $v$ صـفر اسـت)؛ بـا

افزایش $D,v$ هم زیاد می‌شود. در نقطه خاصی از حرکت که $D=mg$ باشد، نیروی خالصی بر جسم اثر نمی‌کند و شتاب جسم صفر می‌شود (شکل $A$ ج). از این لحظه سرعت ثابت می‌ماند. جواب ریاضی ما هم باید همین خاصیت را نشان بدهد.




شکل $\rightarrow A$. نیروهای وارد بر جسمی که در هوا سقوط می‌کند. (الف) در لحظه‌ای که جسم رها می‌شود، $v=0$ است و نیروی اصطکاکی وجود ندارد. (ب) با سرعت گرفتن جسم نیروی اصطکاک هم زیاد می‌شود. (ج) سرانجام نیروی اصطکاک با وزن برابر می‌شود؛ از آن پس این نیرو ثابت می‌ماند و جسم با سرعت ثابت، برابر با سرعت حد، سقوط می‌کند.

قانون دوم نیوتن در مورد این مسئله چنین عبارت است از

$$\sum F = D + mg = ma$$

محور $y$ را رو به پائین می‌گیریم؛ به این ترتیب مؤلفه قائم به صورت زیر است

$$\sum F_y = mg - bv = ma$$

یا

$$a = g - \frac{b}{m}v$$

از این عبارت دیده می‌شود که با افزایش $v$، سرانجام به جایی می‌رسیم کـه طـرف راسـت صـفر می‌شود و این رویداد در زمانی است که $bv/m = g$ بشود. در این نقطه $a = 0$ می‌شود و از آن پس هـم صفر می‌ماند. پس، از اینجا به بعد سرعت ثابت می‌ماند. این همان سرعت حد، $v_T = mg/b$ است.

برای محاسبه $v(t)$، معادله $(1)$ را با $v_0 = 0$ بکار می‌بریم:

$$\int_0^v \frac{dv}{g - (b/m)v} = t$$

انتگرال را می‌توان چنین نوشت

$$-\frac{m}{b}\int_0^v \frac{-bdv}{mg - bv}$$

که به شکل $\int du/u = ln\ u$ است (با $u = mg - bv$). پس

$$= -\frac{m}{b} ln(mg - bv) + \frac{m}{b} ln(mg) = -\frac{m}{b} ln\left(\frac{mg - bv}{mg}\right) = t$$

$$-\frac{m}{b}\int_0^v \frac{-bdv}{mg - bv} = -\frac{m}{b} ln(mg - bv)\Big|_0^v$$

این عبارت، رابطه‌ای کاملاً قابل قبول بین $v$ و $t$ است، امّا برای آسانتر شدن تعبیر و کاربرد آن، بهتر است رابطه را معکوس کنیم و $v(t)$ را بدست بیاوریم:

$$\ln\left(\frac{mg - bv}{mg}\right) = -\frac{bt}{m}$$

$$\frac{mg - bv}{mg} = e^{-bt/m}$$

سرانجام خواهیم داشت

$$v(t)=\frac{mg}{b}(1-e^{-bt/m}) \qquad (2)$$

اگر $t$ کوچک باشد (در زمانهای ابتدایی سقوط جسم)، می‌توان تابع نمایی را به شکل $e^{x}\approx 1+x$ برای $x$های کوچک $(x<<1)$ تقریب کرد. به این ترتیب،

$$v(t)\approx\frac{mg}{b}\left[1-\left(1-\frac{bt}{m}\right)\right]=gt \qquad \text{(برای } t \text{ های کوچک)}$$

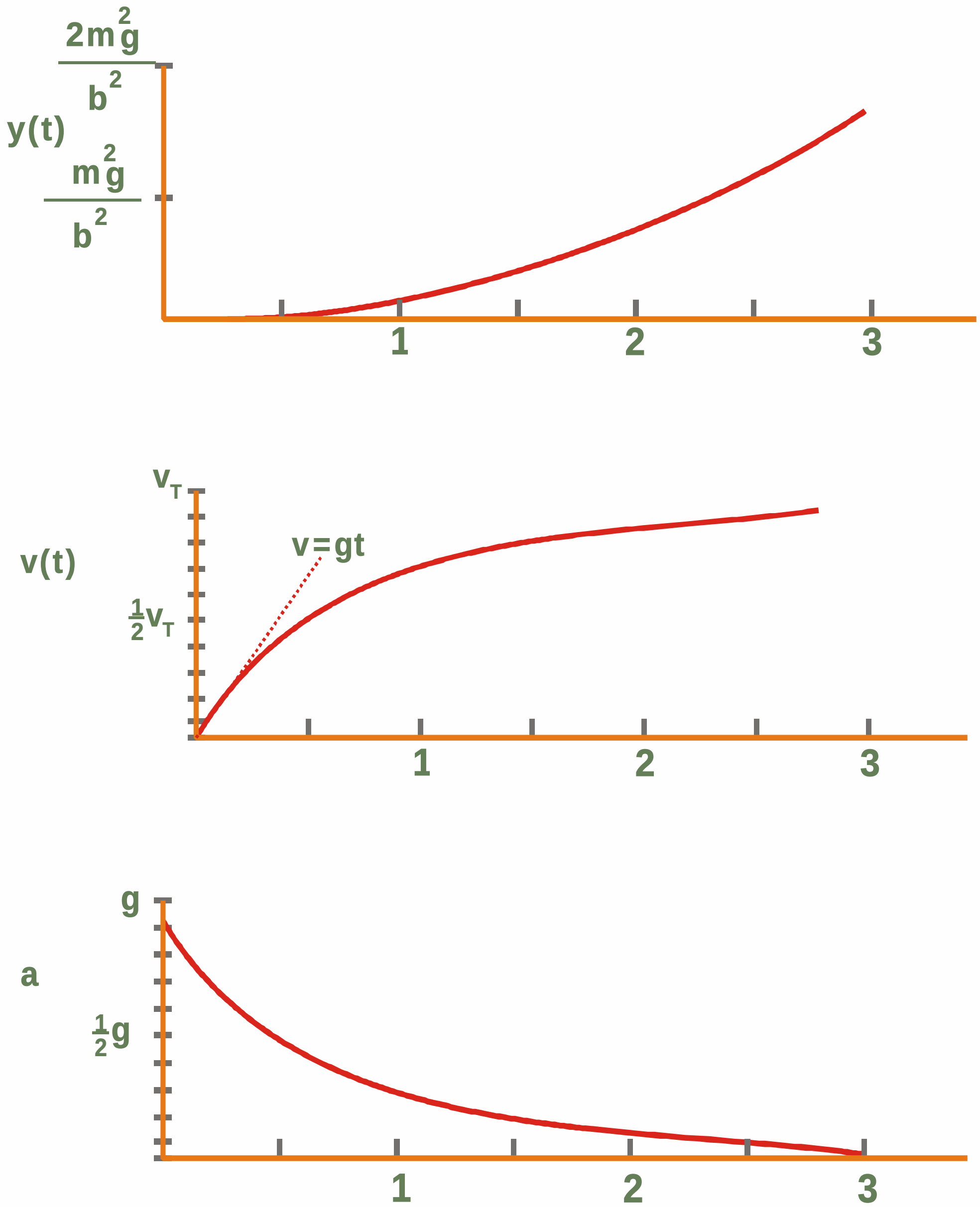
در ابتدای حرکت، پیش از آنکه نیروی اصطکاک قابل ملاحظه شده باشد، حرکت جسم کاملاً نزدیک به سقوط آزاد با شتاب $g$ است.

در $t$های بزرگ، تابع نمایی به صفر می‌گراید (در حد $x\to\infty$ ، $e^{-x}\to \mathbf{0}$). در این حالت سرعت به مقدار حدیش، $v_T$، می‌گراید.

$$v_T=\frac{mg}{b} \qquad (3)$$

با داشتن عبارت $v(t)$، می‌توان از آن مشتق گرفت و $a(t)$ را بدست آورد، یا از آن انتگرال گرفت و $g(t)$ را بدست آورد. شکل $B$ بستگی زمانی $v,a$ و $y$ را نشان می‌دهد.

این مثال، یک رهیافت برای تحلیل نیروی اصطکاک شاره‌ها را نشان می‌دهد. رهیافتی دیگر، $D$ را به جای $v$، متناسب با $v^{2}$ فرض می‌کنند. در این مورد هم از همان محاسباتی که بکار بردیم استفاده می‌شود، امّا ریاضیات مسئله قدری پیچیده‌تر است. اینجا هم یک سرعت حد بدست می‌آید، اگر چه شکل ریاضی این سرعت با آنچه قبلاً بدست آوردیم متفاوت است.




(مثال). مکان، سرعت و شتاب یک جسم افتان که تحت اثر نیروی مقاومت هواست. توجه کنید که شتاب از $G$ شروع می‌شود و به صفر می‌گراید و سرعت از صفر شروع می‌شود و به $v_T$ می‌گراید.

**جدول 1. چند سرعت حد در هوا**

| جسم | سرعت حد $(m/s)$ | مسافت95٪ $(m)$[1] |
|---|---|---|
| گلوله 16 پاوندی | 145 | 2500 |
| چترباز در حال سقوط آزاد (نوعی) | 60 | 430 |
| توپ بیسبال | 42 | 210 |
| توپ تنیس | 31 | 115 |
| توپ بسکتبال | 20 | 47 |
| توپ پینگ پنگ | 9 | 10 |
| قطره باران (به شعاع $1/5mm$) | 7 | 6 |
| چترباز (نوعی) | 5 | 3 |

1. مسافتی که جسم باید از حالت سکون سقوط کند تا به 95٪ سرعت حد خود برسد.

جدول 1 فهرستی از مقادیر نوعی است که برای سرعت حد اجسام متفاوت در هوا اندازه‌گیری شده است.