کاربردهای قوانین نیوتن:

هر مسئله‌ای که قرار است با استفاده از قوانین نیوتن حل شود رهیافت خاص خود را می‌طلبد، امّا چند قاعده عمومی وجود دارد که برای راه اندازی حل همه انواع این مسائل بکار می‌رود. در این بخش، این قواعد را معرفی می‌کنیم و کاربردشان را با چندین مثال نشان می‌دهیم. بهترین راه یادگیری این قواعد، مطالعه مثالهاست.

مراحل اساسی در کاربرد قوانین نیوتن اینها هستند:

1. جسمی را که می‌خواهید وضعیتش را تحلیل کنید خوب مشخص کنید. گاهی ممکن است دو یا چند جسم مورد نظر باشند؛ در این صورت معمولاً هر یک را باید جداگانه بررسی کرد.
2. محیطی را که نیروها از آن به جسم وارد می‌شوند- سطوح، اشیای دیگر، زمین، فنر، ریسمان و مانند آن- شناسایی کنید.
3. یک چارچوب مرجع لخت (بدون شتاب) مناسب انتخاب کنید.
4. یک دستگاه مختصات مناسب (در چارچوب مرجعی که انتخاب کرده‌اید) مشخص کنید؛ مبدأ و جهت محورها را چنان انتخاب کنید که مسئله را تا حد ممکن ساده کند. اگر دقت کافی داشته باشید، می‌توانید برای هر جزئی از یک مسئله پیچیده دستگاه مختصات جداگانه‌ای بکار ببرید.

5. نمودار جسم- آزادی رسم کنید و در آن هر جسم را به شکل یک ذره، همـراه بـا همـه نیروهای وارد بر آن، نمایش بدهید.

6. حالا می‌توانید قانون دوم نیوتن را برای همه مؤلفه‌های نیرو و شتاب بکار بگیرید.

7. بدست آوردن معادلات قیدی همیشه با استفاده از تنها قانون دوم نیوتن تعداد مجهولات مسئله از تعداد معادلات آن کمتر می‌شود، معادلاتی که این دستگاه معـادلات را کامـل می‌کنند، معادلات حاکم بر روابط بین شتاب اجزای یک مجموعـه اسـت. یعنـی از روی نحوه بسته شدن اجزای یک مجموعه یا شکل سطحی کـه روی آن حرکـت مـی‌کننـد، حرکت این اجزاء مقید می‌شود. از این رو بـه ایـن معـادلات اضـافی، معـادلات قیـدی می‌گوییم. پس گام هفتم بدست آوردن معادلات قیدی است.

8. حل دستگاه معادلات و بررسی روابـط حـدی. بعـد از حـل معـادلات و بدسـت آوردن مجهولات مسئله برحسب پارامترهای معلوم می‌توان جوابهـای نهـایی را در وضـعیتهای حدی که جوابهای مسئله به لحاظ فیزیکی قابل پیش بینی است، بررسی کرد.

در طی چند مثال این مراحل را توضیح می‌دهیم:

در تمام این مثالها فرضهایی می‌کنیم که مسئله را ساده‌تر می‌کند و در مقابل بخـشی از واقعیـت فیزیکی را از دست می‌دهد. اجسام را ذره در نظر می‌گیریم و به این ترتیب همه نیروهای وارد بـر جـسم مورد نظر در یک نقطه وارد می‌شود. اجسام را صلب در نظر می‌گیریم، یعنی در طی حرکت شـتاب تمـام اجزای آنها یکی است. این دو فرض به دینامیک ذره اختصاص دارد. در بخشهای دیگر ایـن دو فـرض را

کنار می‌گذاریم و روشهایی برای بررسی حرکت و اجسام با در نظر گرفتن ابعاد آنها و نقطه اثر اعمال نیرو به آنها ارائه می‌دهیم.

مثال. سورتمه‌ای به جرم $m = 7/5kg$ روی سطحی بدون اصطکاک بوسیله ریسمانی کشیده می‌شود (شکل I). نیروی ثابت $P = 21N$ به ریسمان اعمال می‌شود. حرکت را در حالتی که

الف. ریسمان افقی است و **ب.** ریسمان با سطح افقی زاویه $q = 15^{0}$ می‌سازد، تحلیل کنید.

حل. الف. نمودار جسم- آزاد با ریسمان افقی در شکل I ب آمده است. سطح یک نیروی عمودی N بر سورتمه وارد می‌کند. نیروها را به مؤلفه‌هایشان تجزیه می‌کنیم و قانون دوم نیوتن را بکار می‌بریم:

مؤلفه x: $\sum F_x = P = ma_x$

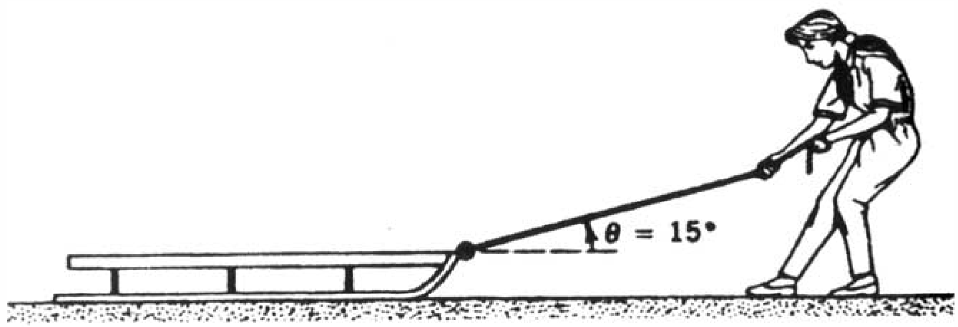
مؤلفه y: $\sum F_y = N - mg = ma_y$

اگر قرار باشد حرکت عمودی نداشته باشیم، سورتمه روی سطح می‌ماند و $a_y = 0$ است، بنابراین

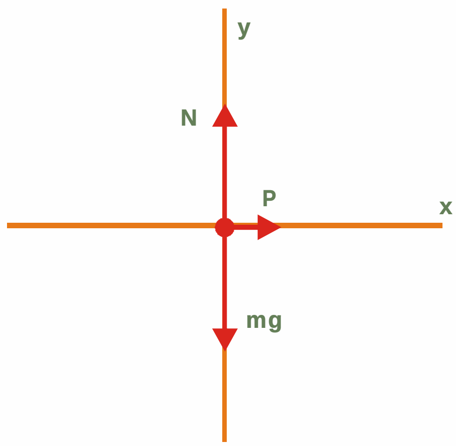
$$N = mg = (7/5kg)\left(9/80m/s^2\right) = 74N$$

شتاب افقی برابر است با

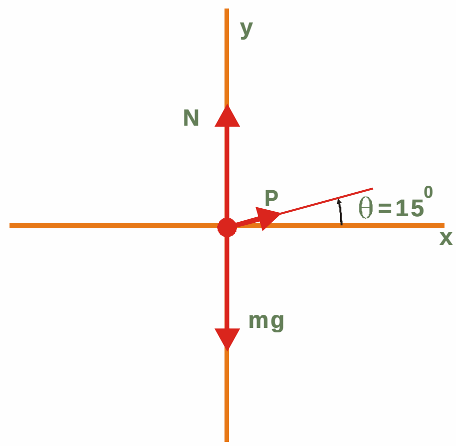
$$a_x = \frac{P}{m} = \frac{21N}{7/5kg} = 2/80m/s^2$$



(الف)



(ب)



(ج)

شکل I. (الف) سورتمه‌ای روی سطح افقی بدون اصطکاکی کشیده می‌شود. (ب) نمودار جسم - آزاد سورتمه در حالت $q = 0^0$. (ج) نمودار جسم - آزاد سورتمه در حالت $q = 15^0$.

توجه کنید که اگر سطح واقعاً بدون اصطکاک باشد (چنانکه ما فرض کرده‌ایم)، شخص نمی‌تواند به مدت زیادی این نیرو را به سورتمه اعمال کند. سورتمه، بعد از $30s$ حرکت با این شتاب، سرعتی برابر بـا $84m/s$ یا $188mi/h$ پیدا می‌کند.

ب. اگر نیروی کشش افقی نباشد، نمودار جسم- آزاد به صورت شکل I ج است و معادلات مربوط به این حالت، به شکل زیرند:

$$\sum F_x = P\cos q = ma_x \qquad : x \text{ مؤلفه}$$

$$\sum F_y = N + P\sin q - mg = ma_y \qquad : y \text{ مؤلفه}$$

فعلاً فرض می‌کنیم که سورتمه روی سطح می‌ماند؛ یعنی $a_y = 0$ است. پس

$$N = mg - Psinq = 74N - (21N)\left(sin15^0\right) = 69N$$

$$a_x = \frac{Pcosq}{m} = \frac{(21N)\left(cos15^0\right)}{7.5kg} = 2.70m/s^2$$

نیروی عمود بر سطح، همواره بر سطح تماس عمود است؛ با مختصاتی که در شکل I ب انتخاب کرده‌ایم، N باید مثبت باشد، اگر $P\ sinq$ را زیاد کنیم N کم می‌شود و سرانجام، در نقطه‌ای، صفر می‌شود. در این نقطه سورتمه، تحت تأثیر مؤلفه رو به بالای P، از سطح جدا می‌شود و باید حرکت عمودی آن را هم تحلیل کنیم. برای این مقادیر P و q که ما بکار بردیم، سورتمه روی سطح باقی می‌ماند و $a_y = 0$ است.

مثال. قطعه‌ای به جرم m به کمک ریسمانی روی سطح بدون اصطکاکی که شیب q دارد نگهداشته شده است (شکل II الف).

الف. کشش ریسمان و نیروی عمود بر سطحی را که سطح بر قطعه وارد می‌کند پیدا کنید.

ب. فرض کنید ریسمان پاره می‌شود و حرکت بعدی را توصیف کنید.

حل. الف. نمودار جسم - آزاد قطعه در شکل II ب آمده است. نیروهای مؤثر بر قطعه عبارتند از نیروی عمودی N، وزن $W = mg$ قطعه و کشش T ریسمان، دستگاه مختصاتی انتخاب می‌کنیم که محور x آن موازی با سطح و محور y آن عمود بر سطح باشد. با این انتخاب، دو تا از نیروها

(N,T) خودبخود به مؤلفه‌هایشان تجزیه شده‌اند و حرکتی که روی سطح انجام می‌شود هم یک بعدی است. در حالت استاتیک شتابی وجود ندارد و مجموع نیروها باید صفر باشد. وزن به مؤلفه‌های x $(-mg\ sinq)$ و y $(-mg\ cosq)$ تجزیه می‌شود و معادلات نیرو چنین هستند.

مؤلفه x: $\sum F_x = T - mg\ sinq = ma_x = 0$

مؤلفه y: $\sum F_y = N - mg\ cosq = ma_y = 0$

معادلات را حل می‌کنیم:

$T = mg\ sinq$

$N = mg\ cosq$

این معادلات را امتحان کنید. آیا معقولند؟ در حد $q = 0^0$ چه می‌شود؟ به نظر می‌رسد که کشش صفر می‌شود. آیا انتظار دارید که کشش برای قطعه‌ای که روی یک سطح افقی ساکن است صفر باشد؟ در حالت $q = 0^0$، نیروی عمود بر سطح چه می‌شود؟ آیا معقول است؟ N,T، در حد $q = 90^0$ چه می‌شوند؟ این همان بررسی حالتهای حدی مسئله است.

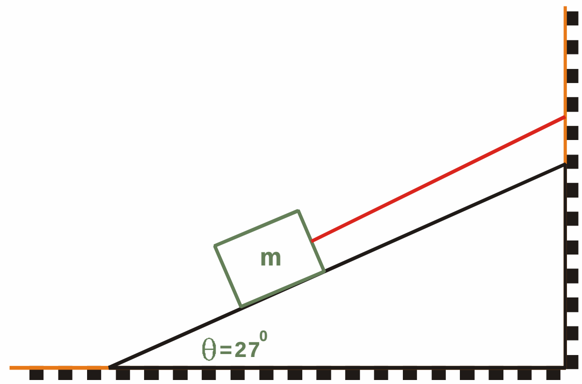
ب. اگر ریسمان پاره شود، کشش از معادلات حذف می‌شود و قطعه دیگر در حالت تعادل نخواهد بود. در این حالت قانون دوم نیوتن می‌گوید که:

مؤلفه x: $\sum F_x = -mg\ sinq = ma_x$

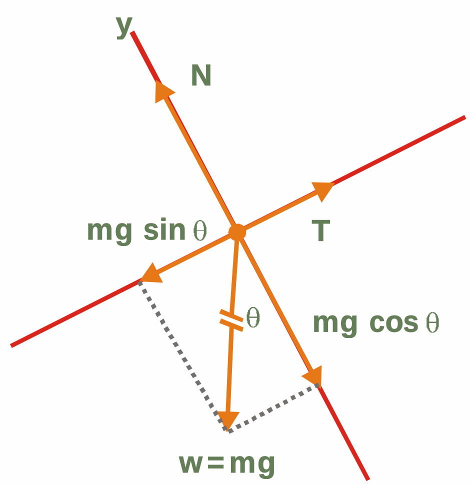
مؤلفه y: $\sum F_y = N - mg\ cosq = ma_y$

بریدن ریسمان حرکت در راستای y را تغییر نمی‌دهد (قطعه از سطح به بالا نمی‌پرد!)، پس اینجا هم $a_y = 0$ است و نیروی عمود بر سطح هم برابر است با $mg\ cosq$، در جهت x خواهیم داشت

$a_x = -g\ \ sinq$



(الف)



(ب)

شکل II. (الف) جرم m به کمک ریسمانی روی سطح شیبداری، در حالت سکون نگهداشته شده است. (ب) نمودار جسم – آزاد m، دقت کنید که دستگاه مختصات xy را مایل گرفته‌ایم تا محور x با سطح موازی باشد. وزن mg را به مؤلفه‌ها تجزیه کرده‌ایم.

علامت منفی نشان می‌دهد که قطعه در جهت منفی x، یعنی به طرف پایین سطح، حرکت می‌کند. حالتهای حدی $q = 0^0$، $q = 90^0$ را بررسی کنید. آیا اینها با انتظارات شما سازگارند؟

مثال. شخصی به جرم m، در آسانسوری روی یک ترازوی یک کفه‌ای ایستاده است شکل (III الف). در حالتیکه اتاقک آسانسور **الف.** با سرعت ثابت پایین می‌آید و **ب.** با شتاب a بالا می‌رود، ترازو چه مقداری را نشان می‌دهد؟

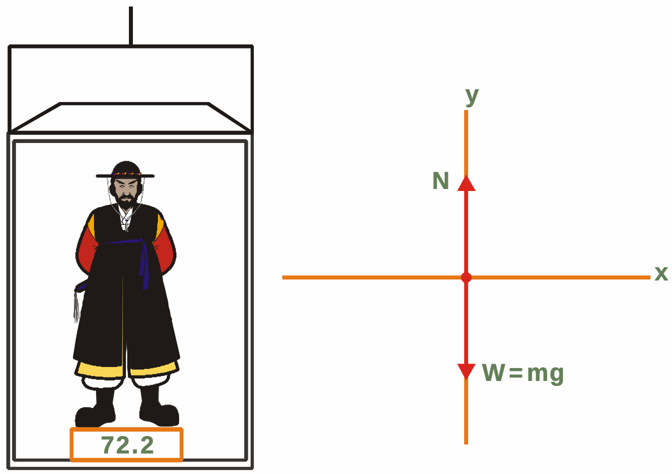
حل. چارچوب مرجع لخت خود را خارج از آسانسور می‌گیریم (مثلاً چاه آسانسور ساختمان)، زیرا آسانسور شتابدار چارچوب مرجع لختی نیست. هم g و هم a را ناظر می‌سنجد که در این چارچوب خارجی است. شکل III ب نمودار جسم- آزاد شخص را نشان می‌دهد. نیروهای دخیل در مسئله عبارتند از نیروی رو به پایین وزن و نیروی رو به بالای عمود بر سطح که ترازو اعمال می‌کند. نیروی عمود بر سطح از طرف ترازو بر شخص وارد می‌شود؛ ترازو نیروی رو به پایینی را نشان می‌دهد که از طرف شخص بر ترازو وارد می‌شود. طبق قانون سوم نیوتن، اندازه این دو نیرو یکی است. بنابراین، اگر نیروی عمود بر سطح را تعیین کنیم، مقداری که ترازو نشان می‌دهد بدست می‌آید.

از نمودار جسم- آزاد داریم.

$$\sum F_y = N - mg = ma$$

یا

$$N = m(g+a)$$



شکل III . (الف) شخصی در آسانسور روی ترازو ایستاده است. (ب) نمودار جسم- آزاد شخص. اندازه نیروی عمود بر سطح N ، که ترازو آن را وارد می‌کند، همان مقداری است که ترازو نشان می‌دهد. (ترازوهای تجارتی از این نوع را برحسب کیلوگرم مدرج می‌کنند نه نیوتن.)

اگر $a = 0$ باشد، یعنی آسانسور ساکن باشد یا، مثل قسمت (الف)، با سرعت ثابت حرکت کند، نتیجه می‌شود که

$$N = mg$$

و در غیر اینصورت

$$N = m(g + a)$$

مقداری که ترازو نشان می‌دهد، یعنی نیروی عمودی کف بر شخص، هنگامی که آسانسور شتاب رو به بالا دارد (a در دستگاه مختصاتی که تعریف کردیم مثبت است) بیشتر می‌شود و هنگامی که آسانسور شتاب رو به پایین دارد کمتر می‌شود. در سقوط آزاد $(a = -g)$ ترازو صفر را نشان می‌دهد (نیروی عمود بر سطح صفر است).

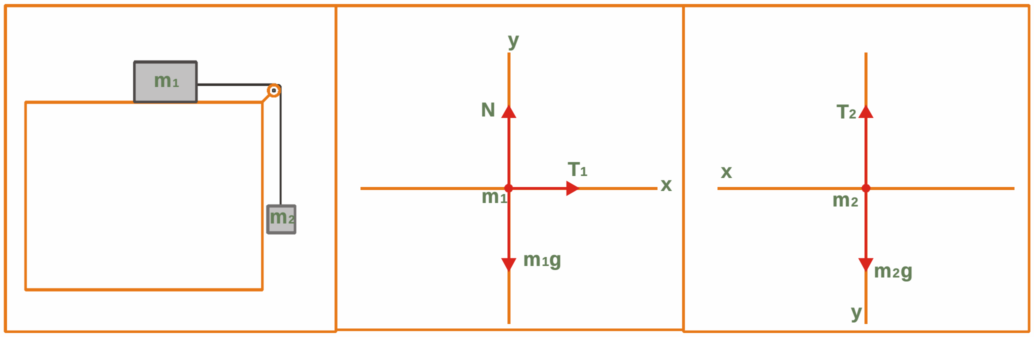
مثالهای شامل معادلات قیدی:

در اینجا چند کاربرد دیگر قوانین نیوتن را بررسی می‌کنیم. در این مثالها چند جسم وجود دارنـد که باید آنها را تک تک تحلیل کرد، امّا این اجسام کاملاً مستقل از هم نیستند زیرا حرکـت یـک جـسم مقید به حرکت جسمی دیگر است، مثل حالتی که دو جسم با ریسمانی بـه طـول ثابـت بـه هـم بـسته شده‌اند. این مثالها نمونه‌ای از مسائلی است که حداقل یک معادله از معادلات قیدی بدست می‌آید.

مثال. شکل IV الف قطعه‌ای به جرم m_1 را نشان می‌دهد که روی سطح افقی بـدون اصـطکاکی واقع شده است. این قطعه توسط ریسمانی به جرم ناچیز که به قطعه آویزانی به جرم m_2 متـصل اسـت کشیده می‌شود. ریسمان از روی قرقره‌ای می‌گذرد که جرم آن قابل چشمپوشی است و محور آن هم بـا اصطکاکی ناچیز می‌چرخد. کشش ریسمان و شتاب قطعات را پیدا کنید.

حل. در این مسئله دو جسم دخیل است؛ بر خلاف مسائل قبلی که در آنها و تنها یک جسم مورد نظر بود. شکلهای IVب و IVج نمودار جسم- آزاد این دو جسم مجزا را نشان می‌دهند. لزومی نـدارد که برای هر دو جسم دستگاه مختصات یکسانی به کار بریم، تاجایی که در هر زیر سیستم بطور سـازگار عمل کنیم، مهم نیست که محورهای مختصات هر بخش را چگونه تعریف می‌کنیم.

نیروهای وارد بر قطعه 1 عبارتند از نیروی عمودی N، وزن و کشش ریسمان. چون انتظار داریـم که قطعه 1 به طرف راست شتاب بگیرد، این جهت را جهت مثبت x می‌گیریم. همچنین انتظار داریم که قطعه 1 روی سطح افقی باقی بماند؛ بنابراین، مؤلفه y شتاب آن صفر است.



(الف) (ب) (ج)

مثال IV. (الف) ریسمانی قطعه m_1 را روی سطح افقی صافی می‌کشد. ریسمان از روی قرقره‌ای می‌گذرد و به قطعه m_2 متصل است. (ب) نمودار جسم - آزاد قطعه m_1. (ج) نمودار جسم - آزاد قطعه m_2.

به این ترتیب، معادلات مؤلفه‌ای قانون دوم نیوتن به این شکل در می‌آیند:

مؤلفه x: $\sum F_x = T_1 = m_1 a_{1x}$

مؤلفه y: $\sum F_y = N - m_1 g = m_1 a_{1y} = 0$

برای قطعه 2، محور y را عمودی و رو به پایین می‌گیریم، یعنی در همان جهتی که انتظار داریم جهت شتاب قطعه 2 باشد. برای این قطعه لازم نیست که مؤلفه x را بررسی کنیم و مؤلفه y قانون دوم نیوتن نتیجه می‌دهد که

$$\sum F_y = m_2 g - T_2 = m_2 a_{2y}$$

ریسمان را بی‌جرم فرض کردیم، پس نیروی خالص وارد بر آن باید صفر باشد. کششهای T_2, T_1 که از ریسمان بر قطعات وارد می‌شوند عکس‌العملهای T_2, T_1 را دارند، که اندازه‌اشان با دو نیروی اول برابر است و نیروهایی هستند که قطعات بر ریسمان وارد می‌کنند. اگر ریسمان راست می‌بود، صفر شدن نیروی خالص وارد بر آن نتیجه می‌داد که $T_1 = T_2$. وجود قرقره ایده‌آل (بدون جرم و بدون اصطکاک)

که جهت کشش ریسمان را عوض می‌کند هم تغییری در این نتیجه نمی‌دهد: اندازه کشش در تمام طول ریسمان ثابت است. این کشش مشترک را با متغیر T نشان می‌دهیم.

اگر ریسمان تغییر طول هم نتواند بدهد (یعنی کشیده نشود)، هر حرکت قطعه **1** در جهت x دقیقاً متناظر با همان حرکت قطعه **2** در جهت y است. در نتیجه، شتاب دو قطعه یکی است. این شتاب مشترک را a می‌نامیم. یعنی $a_1 = a_2 = a$ این همان معادله قیدی است برای این مسئله که قبلاً گفتیم.

حالا سه معادله داریم:

$$T = m_1 a$$
$$N = m_1 g$$

$$m_2 g - T = m_2 a$$

از حل معادلات اول و سوم نتیجه می‌شود که

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \qquad (1)$$

و

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \qquad (2)$$

بررسی حالات حدی این نتایج مفید است. اگر m_1 صفر شود چه می‌شود؟ انتظار داریم که ریسمان شُل شود $(T = 0)$ و m_2 سقوط آزاد می‌کند $(a = g)$. معادلات هم، به درستی، همین را پیش بینی می‌کنند. اگر m_2 صفر باشد، نیرویی افقی بر قطعه **1** وارد نمی‌شود و این قطعه شتاب نمی‌گیرد؛ اینجا هم، معادلات ما نتیجه درست می‌دهند.

توجه کنید که، همانطور که انتظار می‌رود، $a < g$ است. همچنین دقت کنید که T با $m_2 g$ برابر نیست. تنها اگر قطعه 2 در حالت تعادل آویزان باشد $(a = 0)$ است که $T = m_2 g$ می‌شود. اگر قطعه 2 به طرف پایین شتاب داشته باشد، $T < m_2 g$ می‌شود؛ اگر قطعه به طرف بالا شتاب داشته باشد، $T > m_2 g$ می‌شود.

آیا معادلات 1 و 2 در حد $g = 0$ هم نتیجه درست می‌دهند؟

مثال. دو جرم نامساوی را در نظر بگیرید که با ریسمانی که از روی قرقره‌ای می‌گذرد به هم متصلند (شکل V). قرقره ایده‌آل است (جرم آن ناچیز است و با اصطکاک ناچیزی حول محورش می‌چرخد). این دستگاه را ماشین آتوود[1] هم می‌نامند. فرض کنید که m_2 بزرگتر از m_1 باشد. کشش ریسمان و شتاب جرمها را پیدا کنید.

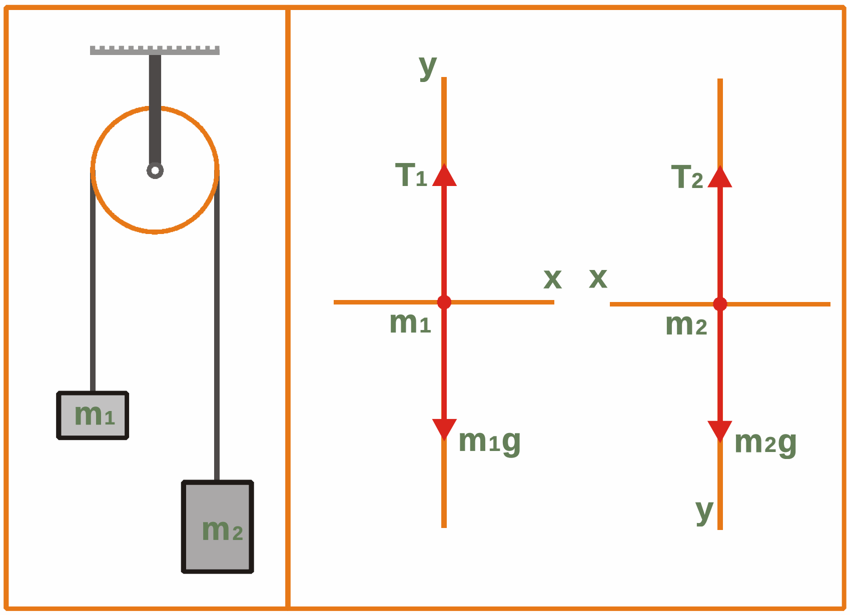
حل. چون پیش بینی می‌کنیم که جرمها فقط شتاب عمودی داشته باشند، جهت مثبت y را، برای هر جرم، جهت حرکت آن می‌گیریم. کافی است که مؤلفه‌های y را بررسی کنیم. شکل Vب نمودارهای جسم- آزاد را نشان می‌دهد. معادلات حرکت عبارتند از:

---

[1] جرج آتوود (1745 تا 1807) یک ریاضیدان انگلیسی بود که در سال 1784 این ابزار را برای نمایش قوانین حرکت شتابدار و سنجش g اختراع کرد. او با کوچک کردن اختلاف میان m_2, m_1 می‌توانست آثار سقوط آزاد را "کند کند" و زمان حرکت وزنه افتان را با یک ساعت آونگ دار اندازه بگیرد؛ ساعت آونگ‌دار دقیقترین ابزاری بود که آتوود در آن زمان برای سنجش بازه‌های زمانی در اختیار داشت.

قطعه 1: $\sum F_y = T_1 - m_1 g = m_1 a_1$

قطعه 2: $\sum F_y = m_2 g - T_2 = m_2 a_2$



شکل V . (الف) نمودار ماشین آتوود، شامل دو جرم آویزان که با ریسمانی به هم متصلند که از روی قرقره‌ای می‌گذرد. (ب) نمایش جسم – آزاد m_1 و m_2.

که در آن، a_1, a_2، به ترتیب، شتاب m_1 و شتاب m_2 هستند. در اینجا هم، مثل مثال قبلی، اگر ریسمان بی‌جرم باشد و کشیده نشود و قرقره هم بی‌جرم و بدون اصطکاک باشد، $T_1 = T_2 = T$ و $a_1 = a_2 = a$ است. (فرض می‌کنیم که این قرقره ایده‌آل اندازه کشش یا شتاب را در طول ریسمان تغییر نمی‌دهد؛ کارش فقط این است که جهت کشش و شتاب را عوض کند.) حالا اگر دو معادله بالا را، پس از جایگذاری مقادیر مشترک حل کنیم، نتیجه می‌شود که

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \qquad (3)$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \qquad (4)$$

حالتهای حدی $m_1 = 0, m_2 = 0, g = 0$ و $m_1 = m_2$ را بررسی کنید.

توجه کنید که $m_1 g < T < m_2 g$ و مطمئن شوید که علت آن را درک کرده‌اید.

مثال. دستگاه مکانیکی شکل VI الف را در نظر بگیرید؛ سیستم را از حالت سکون رها می‌کنـیم، حرکت را توصیف کنید.

حل. شکلهای VI ب و VI ج نمودار جسم- آزاد قطعات 1 و 2 را نشان مـی‌دهنـد. دسـتگاههای مختصات را طبق شکل گرفته‌ایم تا برای هر جسم، یک محور مختصات موازی با شتابی باشـد کـه بـرای جسم پیش بینی می‌کنیم. در اینجا هم، مثل مثالهای قبلی، انتظار داریم که مقـدار کـشش در همـه جـا یکسان باشد و اندازه شتاب حرکت عمودی m_2 با حرکت m_1 روی صفحه یکی باشـد. فـرض مـی‌کنـیم که m_1 در جهت مثبت x حرکت می‌کند (اگر فرضمان غلط باشد، a منفی در می‌آید.) معادلات مؤلفه‌ای قانون دوم نیوتن برای m_1 عبارت است از

مؤلفه x: $\sum F_x = T - m_1 g \sin\theta = m_1 a$

مؤلفه y: $\sum F_y = N - m_1 g \cos\theta = 0$

و برای m_2 به صورت زیر است

$$\sum F_y = m_2 g - T = m_2 a$$

از حل همزمان این معادلات نتیجه می‌شود که

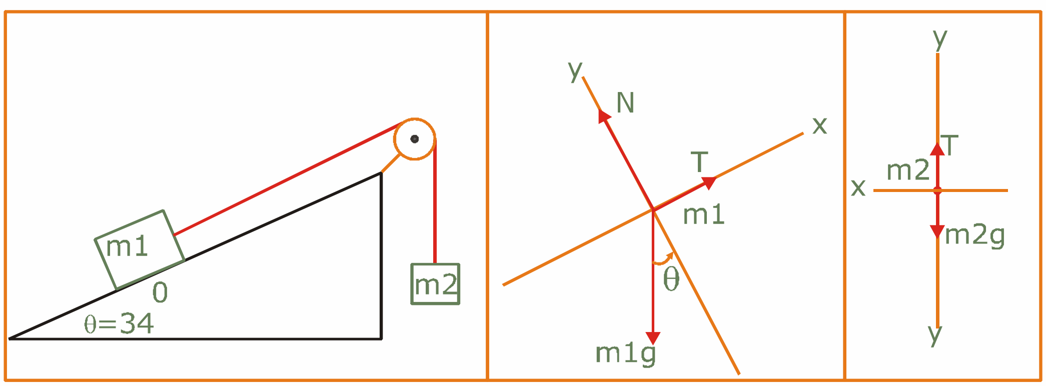
$$a = \frac{m_2 - m_1 \sin q}{m_1 + m_2} g \qquad (5)$$

و

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g(1 + \sin q) \qquad (6)$$

توجه کنید که این نتایج، به ازای $q = 0$ (یعنی حرکت قطعه 1 افقی است) به همان نتایج دو مثال قبل تبدیل می‌شوند و به ازای $q = 90^0$ (یعنی حرکت قطعه 2 عمودی است)

در حالت کلی، اگر نیروهای اصطکاکی را هم، که در خلاف جهت حرکتند، در نظر بگیریم، دیگر چنین نخواهد بود.

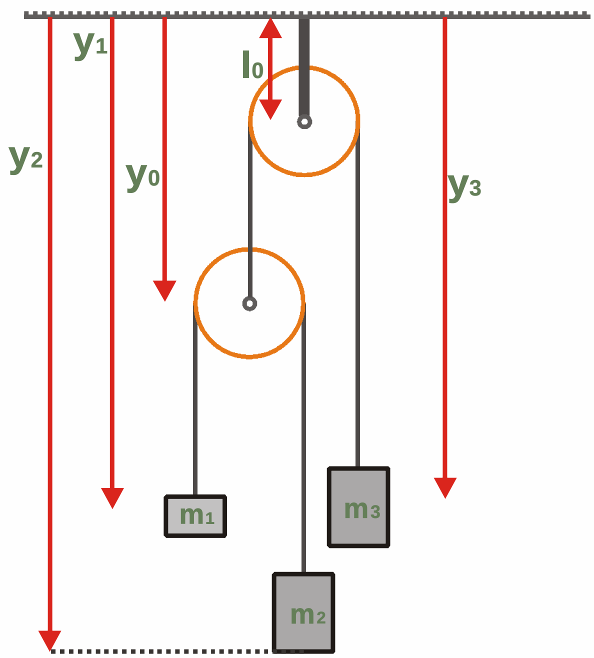


(الف) (ب) (ج)

شکل VI . (الف) قطعه m_1 روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی می‌لغزد. قطعه m_2 از ریسمانی، که به m_1 متصل است، آویزان است. (ب) نمودار جسم - آزاد m_1 . (ج) نمودار جسم - آزاد m_2 .

برای بدست آوردن معادلات قیدی مربوط به مسائلی پیچیده‌تر یک روش وجود دارد که آن را در مثال زیر توضیح می‌دهیم. در این شکل سه جسم از طریق نخ و قرقره به هم متصل هستند، می‌خـواهیم

رابطه بین شتاب حرکت این اجسام را بدست آوریم. اگر مطابق شکل برداری از نقطه آویز که ثابت است تا هر جسم رسم کنیم، بردارهای y_1, y_2, y_3, y_0 ، این بردارها بردار مکان این اجسام است که با زمان هر کدام از اینها تغییر می‌کند امّا قیدی که در این حرکتها وجود دارد این است که طول نخهـای متـصل بـه اجسام ثابت است. نخ قرمز رنگ به جسم **1** و **2** و حل است و طول آن را مقدار ثابت L_1 در نظر می‌گیریم.



نخ آبی رنگ به جسم **3** و قرقره متحرک متصل است و طول آن مقدار ثابت L_2 در نظر می‌گیریم.

طول نخ L_1 را می‌توان برحسب بردارهای مکان اینطور نوشت:

$$y_1 - y_0 + y_2 - y_0 = L_1$$

و طول نخ L_2 اینطور بدست می‌آید:

$$y_3 - L_0 + y_0 - L_0 = L_2$$

مقادیر y_0, y_3, y_2, y_1 با حرکت این اجسام نسبت به زمان متغیر نه، امّا در هر لحظه از زمان دو رابطه

فوق برقرار است. اگر از دو عبارت فوق دو بار نسبت به زمان مشتق بگیریم با توجه به اینکه $\frac{d^2y}{dt^2} = a$

است می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - 2a_0 = 0 \\ a_3 + a_0 = 0 \end{cases}$$

برای بدست آمدن در دو عبارت فوق مشتق مقادیر ثابت $\left(L_2, L_1, L_0\right)$ صفر شده است.

این دو عبارت معادلات قیدی مربوط به این مسئله است، که به شکل ساده‌تر می‌توان آن را

اینطور نوشت:

$$a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$$