دستگاههای با جرم متغیر

تاکنون فقط دستگاههایی را مطالعه کردیم که در آنها M، جرم کل دستگاه در طول زمان ثابت بود. اکنون به دستگاههایی می‌پردازیم که هنگام آزمایش، جرم به آنها وارد و یا از آنها خارج می‌شود. مقدار dM/dt در حالت اول مثبت و در حالت دوم منفی است.

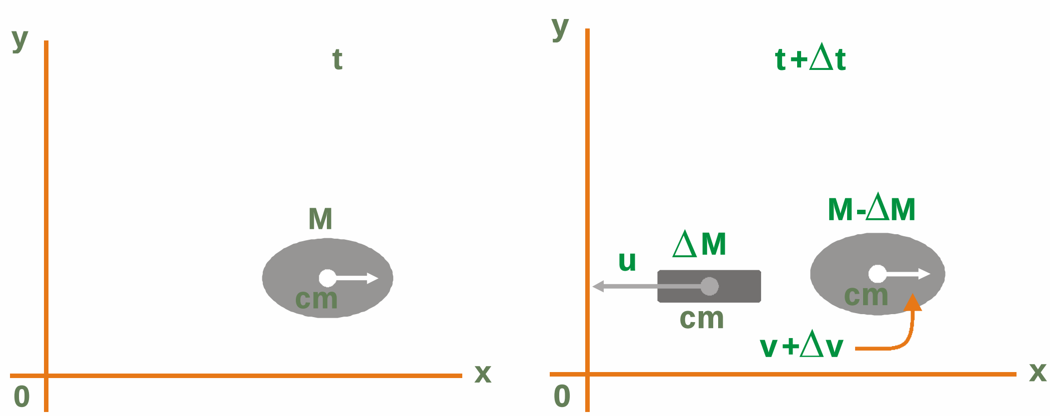
شکل (A)الف دستگاهی به جرم M را نشان می‌دهد که مرکز جرم آن با سرعت v نسبت به یک چارچوب مرجع خاص حرکت می‌کند. نیروی خارجی وارد به این دستگاه F_{ext} است. پس از زمان Δt پیکربندی دستگاه به صورتی که در شکل (A) ب دیده می‌شود در می‌آید، در این مدت جرم DM از دستگاه خارج شده است و مرکز جرم آن با سرعت u نسبت به ناظر حرکت می‌کند. بنابراین، جرم دستگاه برابر با $M-\Delta M$ و سرعت مرکز جرم آن v برابر با $v+\Delta v$ است.

دستگاه شکل (A) را می‌توان یک موشک تصور کرد. این موشک، گاز داغ را با سرعت نسبتاً زیاد از خود خارج می‌کند و با کم شدن جرمش، سرعت آن افزایش می‌یابد. در هر موشک، کاهش جرم در مدتی که سوخت مصرف می‌کند بطور پیوسته ادامه دارد. نیروی خارجی F_{ext} نیروی پیشران موشک نیست، بلکه نیروی گرانشی وارد بر موشک و نیروی مقاومت هواست.

اکنون برای تحلیل این مسئله موقتاً جرم دستگاه را ثابت فرض می‌کنیم. این گفته به این معنی است که در شکل (A) ب دستگاه ما هم شامل جرم $M-\Delta M$ و هم شامل جرم خارج شده ΔM است، یعنی جرم کل دستگاه در شکل (A) الف برابر M است. این فرض به ما امکان می‌دهد تا نتایجی

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

را که تاکنون برای دستگاههای با جرم ثابت بدست آوردیم، بکار ببریم. بعداً خواهیم دید که با استفاده از این روش می‌توانیم قانون دوم نیوتن را برای دستگاههایی که جرمشان ثابت نیست بکار ببریم.



(الف) (ب)

شکل (A) از جرم M که با سرعت v حرکت می‌کند، جرم DM در بازه زمانی Δt خارج می‌شود. یک نیروی خارجی F_{ext} (که در شکل نشان داده نشده است) به دستگاه اثر می‌کند.

از معادله (1)، یعنی

$$F_{ext} = \frac{dP}{dt}$$

به عنوان یک نتیجه تقریبی برای بازه زمانی محدود $D\ t$ می‌توان نوشت

$$F_{ext} \cong \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P_f - P_i}{\Delta t}$$

که در آن P_f تکانه (نهایی) دستگاه در شکل (A) ب و P_i تکانه (اولیه) دستگاه در شکل (A) الف است. امّا $P_i = Mv\ ,\ P_f = (M - DM)(v + Dv) + DMu$، پس نتیجه می‌گیریم که

$$F_{ext} \cong \frac{[(M - \Delta M)(v + \Delta v) + \Delta M u] - [Mv]}{\Delta t}$$

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

$$= M\frac{\Delta v}{\Delta t} + [u-(v+\Delta v)]\frac{\Delta M}{\Delta t} \qquad (2)$$

حال اگر Δt به سمت صفر میل کند، پیکربندی شکل (A) ب به شکل (A) الف نزدیک می‌شود؛ یعنی $\Delta v / \Delta t$ به dv/dt که شتاب جسم در شکل (A) الف است نزدیک می‌شود. کمیت ΔM جرمی است که در مدت زمان Δt خارج شده است و همین باعث می‌شود که جرم M کاهش یابد. چون dM/dt، یعنی تغییر جرم جسم نسبت به زمان در این حالت منفی است، وقتی Δt به سمت صفر میل می‌کند بجای کمیت مثبت $\Delta M / \Delta t$، مقدار $-dM/dt$ را قرار می‌دهیم. سرانجام همچنان که Δt به صفر میل می‌کند، Δv نیز به سمت صفر می‌رود. با منظور کردن این تغییرات در معادله (2)، خواهیم داشت

$$F_{ext} = M\frac{dv}{dt} + v\frac{dM}{dt} - u\frac{dM}{dt} \qquad (\text{3 الف})$$

یا

$$F_{ext} = \frac{d}{dt}(Mv) - u\frac{dM}{dt} \qquad (\text{3 ب})$$

که همان قانون دوم نیوتن است و نیروهای خارجی وارد بر جسمی که (نظیر جسم شکل (A) الف) جرمش تغییر می‌کند را نشان می‌دهد.

توجه کنید که در حالت خاصی که جرم جسم ثابت است $(dM/dt = 0)$ این معادلات به صورت معادلات آشنای $F_{ext} = Ma$, $F_{ext} = (d/dt)(Mv)$ در می‌آیند. در اینجا باید توجه کرد که برای دستگاههای با جرم متغیر، نمی‌توان با متغیر گرفتن جرم در معادله $F_{ext} = dP/dt = d(Mv)/dt$ یک رابطه کلی برای قانون دوم نیوتن بدست آورد، زیرا در این صورت خواهیم داشت

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

$$F_{ext} = \frac{d(Mv)}{dt} = M\frac{dv}{dt} + v\frac{dM}{dt}$$

که فقط حالت خاصی از معادله کلی‌تر (3) است، یعنی حالتی است که در آن یا (الف) $dM/dt = 0$، یعنی جرم دستگاه ثابت است، یا (ب) $u = 0$، یعنی چارچوب مرجع خاصی انتخاب کرده‌ایم. تنها به شرطی می‌توانیم از معادله $F_{ext} = dp/dt$ برای تحلیل دستگاههای با جرم متغیر استفاده کنیم که آن را در مورد کل دستگاه با جرم ثابتی که میان اجزای آن تبادل جرم صورت می‌گیرد، بکار برده باشیم. این در واقع همان کاری است که هنگام بدست آوردن معادلات (3) انجام دادیم. اهمیت فرمولبندی تکانه به صورت $F_{ext} = dp/dt$ در مکانیک کلاسیک در این واقعیت نهفته است که پایستگی تکانه را به خوبی نشان می‌دهد و روش فیزیکی ساده‌ای را برای حل مسائل مربوط به دستگاههای پیچیده در اختیار ما می‌گذارد. چون انتخاب دستگاه در اختیار ماست همیشه می‌توانیم دستگاه خود را به قدری بزرگ بگیریم که جرم آن ثابت باشد.

با وجود این، اغلب بهتر است که، مانند مسئله موشک، دستگاهی را انتخاب کنیم که جرمش با زمان تغییر می‌کند. در چنین حالتهایی قانون دوم نیوتن، یعنی معادلات (3) را به صورتی بکار می‌بریم که در بعضی موارد راحت‌تر و از نظر فیزیکی قابل توجیه‌تر باشد. کمیت $u-(v+\Delta v)$ در معادله (2) همان v_{rel}، یعنی سرعت نسبی جرم خارج شده نسبت به سرعت جسم اصلی است. بنابراین معادله (3) الف را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$M\frac{dv}{dt} = F_{ext} + (u-v)\frac{dM}{dt} \qquad \text{(4 الف)}$$

یا

Olympiad.roshd.ir

$$M\frac{dv}{dt}=F_{ext}+v_{rel}\frac{dM}{dt} \qquad \text{(4 ب)}$$

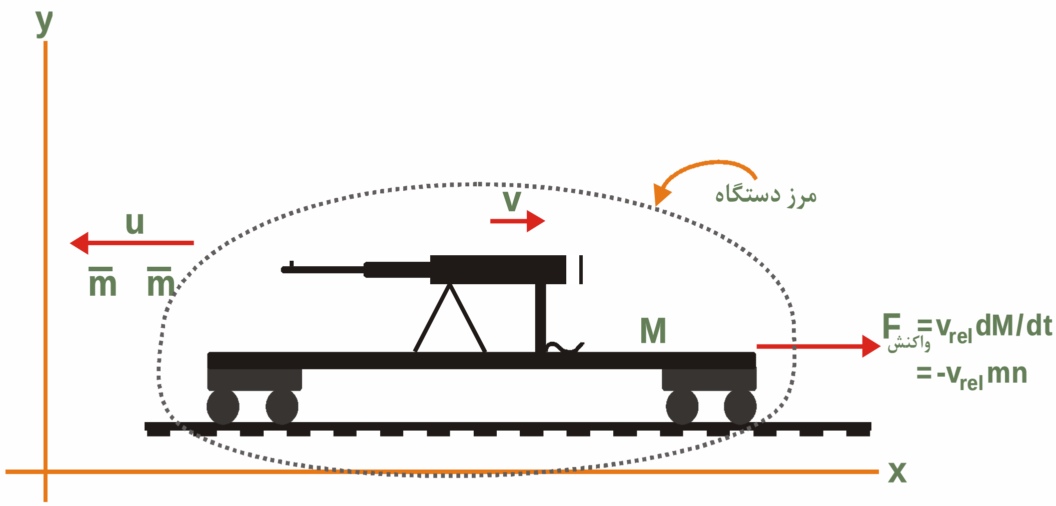
جمله آخر معادله 4 ب، $\left[v_{rel}\left(dM/dt\right)\right]$، عبارت است از آهنگ انتقال تکانه بـه داخـل (یـا خـارج) دستگاه توسط جرمی که از دستگاه خارج (یا به آن وارد) می‌شود. این کمیت را می‌توان به صورت نیرویی تعبیر کرد که جرم خارج شده از (یا وارد شده به) دستگاه روی آن اعمال می‌کند. در موشک، این کمیت را نیروی پیشران می‌نامند و هدف طراحان موشک این است که آن را تا حد امکان بزرگتر کنند. معادله 4 ب نشان می‌دهد که برای این کار باید تا جایی که ممکن است جرم بیشتری در یکـای زمـان از موشـک خارج شود و سرعت جرم خارج شده نسبت به موشک نیز تا حد امکان زیاد باشد. معادله 4 ب را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$M\frac{dv}{dt}=F_{ext}+F_{\text{واکنش}}$$

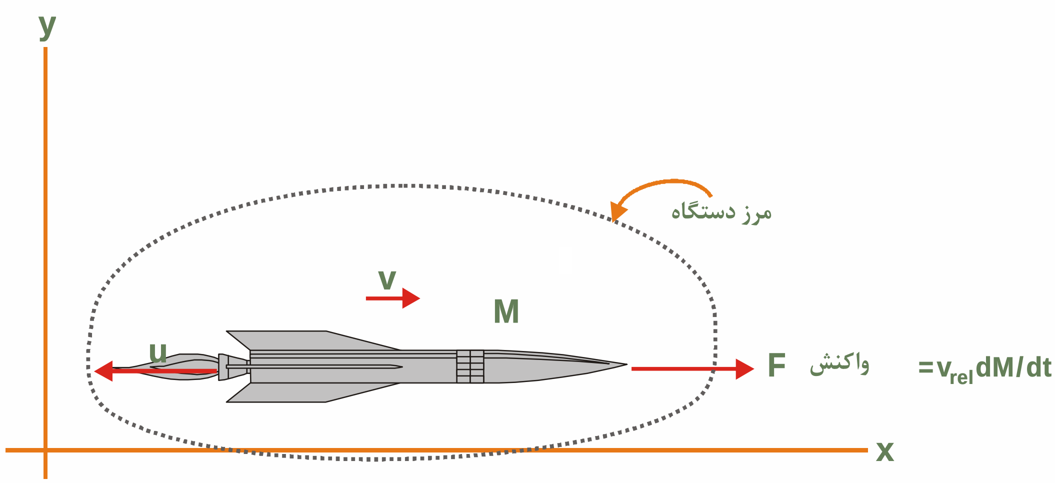
که در آن F (مساوی با $v_{rel}dM/dt$) نیروی واکنشی است که جرم خارج شده به دستگاه وارد می‌کند.

مثال 1. مسلسلی مطابق شکل (B) الف بر روی واگنی که می‌تواند روی یک سطح افقـی بـدون اصطکاک حرکت کند، قرار گرفته است. جرم دستگاه (واگن + مسلسل) در یک لحظه خاص M است. در همین لحظه مسلسل گلوله‌هایی به جرم m شلیک می‌کند که سرعت آنها در چارچوب مرجع نشان داده شده، u است. سرعت واگن در این چارچوب مرجع v و سرعت گلوله‌ها نسبت بـه واگـن $u-v$ اسـت. تعداد گلوله‌های شلیک شده در یکای زمان، n است. شتاب واگن چقدر است؟

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir



(الف)



(ب)

شکل (B) (الف) مثال 1. یک مسلسل روی واگنی که روی یک سطح بدون اصطکاک می‌غلتد نصب شده است. این مسلسل، در واحد زمان، n گلوله هر یک به جرم m شلیک می‌کند. سرعت گلوله‌ها نسبت به مسلسل $u-v$ است. در لحظه نشان داده شده، تعدادی از گلوله‌ها قبلاً از دستگاه خارج شده‌اند. سرعتهای نشان داده شده برای واگن و گلوله‌ها سرعتهایی هستند که توسط ناظر واقع در چارچوب مرجع متصل به ریلها مطابق شکل اندازه‌گیری می‌شود. نیروی واکنش وارد بر دستگاه برابر است با $F=-mnv_{rel}=(dM/dt)v_{rel}$

(ب) موشکی با نیروهای خارجی قابل اغماض، در فضا حرکت می‌کند. ذرات گاز از مجرای تخلیه موشک خارج می‌شوند و سرعت این ذرات نسبت به موشک برابر است با $u-v$. آهنگ خروج جرم از مجرای تخلیه برابر $-dM/dt$ است. نیروی واکنش وارد بر موشک عبارت است از $F=(dM/dt)v_{rel}$. سرعتهای مربوط به موشک و گازهای خارج شده از مجرای تخلیه نسبت به زمین اندازه‌گیری شده‌اند.

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

مجموعه واگن و مسلسل را به عنوان دستگاه انتخاب می‌کنیم. چون M، جـرم دســتگاه، متغیـر است قانون دوم نیوتن را به صورت معادله (4) ب بکار می‌بریم. چون هیچ نیـروی خـارجی خالـصی بـه دستگاه وارد نمی‌شود، با قرار دادن $F_{ext}=0$ در آن معادله، داریم

$$M\frac{dv}{dt}=v_{rel}\frac{dM}{dt}$$

در اینجا dv/dt برابر با a است، شتاب دستگاه، v_{rel} برابر است بـا $u-v$ و جهــتش در شــکل (B) الف به طرف چپ است و dM/dt برابر با $-mn$ است. با جانشانی این مقادیر در معادله بالا داریم.

$$a=\frac{dv}{dt}=-\frac{v_{rel}(mn)}{M}$$

این معادله نشان می‌دهد که جهت a خلاف جهت v_{rel} است، یعنی جهت a در شکل (B) الف به طرف راست است. اگر در یک لحظه $n=10/s, m=10g, v_{rel}=500m/s$ و $M=200kg$ باشـد، در آن لحظه داریم

$$a=\frac{(500m/s)(10^{-2}kg)(10/s)}{200kg}=0/25\ m/s^2$$

بزرگی متوسط نیروی پیشران گلوله‌های خارج شده که در این لحظه به دستگاه (واگن + مسلسل) وارد می‌شود، برابر است با

$$F=v_{rel}nm=(500m/s)(10/s)(10^{-2}kg)=50N$$

در شکل (B) ب وضعیت مشابهی را برای یک موشک نشان داده‌ایم. توجـه بـه ایـن مـسئله از دیدگاه قانون سوم نیوتن واصل پایستگی تکانه آموزنده است. یک دستگاه با جرم ثابت (موشک + گاز)را انتخاب و یک چارچوب مرجع را به مرکز جرم آن متصل می‌کنیم. موشک فـواره‌ای از گازهـای داغ را از

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

عقب به بیرون می‌راند. این نیروی کنش است. فواره گاز نیرویی به موشک وارد می‌کند که آن را به پیش می‌راند. این نیروی واکنش است. این نیروها در دستگاه (موشک + گاز) نیروهای داخلی هستند. در غیاب نیروهای خارجی تکانه کل دستگاه ثابت است (مرکز جرم که ابتدا در حال سکون بوده است همچنان در حال سکون باقی می‌ماند). البته ممکن است تکانه اجزای دستگاه (موشک و گاز) تغییر کند. گازها نسبت به مرکز جرم دستگاه تکانه‌ای به طرف عقب بدست می‌آورند و موشک نسبت به مرکز جرم تکانه‌ای مساوی با آن به طرف جلو پیدا می‌کند.

دستگاه (گلوله‌ها + واگن و مسلسل) را می‌توانید به همین طریق تحلیل کنید.

مثال 2. وزن موشکی پس از سوختگیری و قرار گرفتن بر روی سکوی پرتاب برابر $135000N$ است. این موشک در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود و پس از تمام شدن سوخت وزنش به $45000N$ می‌رسد. گازها با آهنگ $150kg/s$ و با سرعت $1500m/s$ (سرعت خروج گاز) نسبت به موشک خارج می‌شوند. فرض می‌کنیم که این دو کمیت هنگام استعمال سوخت ثابت بمانند.

الف. نیروی پیشران چقدر است؟ نیروی پیشران F، آخرین جمله در معادله (**4**)ب است، پس

$$F = v_{rel}\frac{dM}{dt} = (1500m/s)(150kg/s) = 225000N$$

توجه کنید که در ابتدا وقتی که مخازن سوخت پر است نیروی خالص رو به بالای وارد بر موشک (با چشمپوشی از مقاومت هوا) برابر است با تفاضل نیروی پیشران $(225000N)$ و وزن اولیه $(135000N)$، یعنی $90000N$. درست قبل از اتمام سوخت، نیروی خالص رو به بالا برابر است با تفاضل $225000N$, $45000N$، یعنی $180000N$.

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

ب. اگر بتوانیم از تمام نیروهای خارجی، از جمله نیروهای گرانشی و مقاومت هوا چشم‌پوشی کنیم، سرعت موشک در لحظه اتمام سوخت چقدر خواهد بود؟

اگر $F_{ext} = 0$ را در معادله (4) ب قرار دهیم، خواهیم داشت

$$M\frac{dv}{dt} = v_{rel}\frac{dM}{dt} \quad \text{یا} \quad dv = v_{rel}\frac{dM}{M}$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه میان لحظه‌ای که سرعت v_0 و جرم موشک M_0 است تا لحظه‌ای که سرعت v و جرم موشک M است، داریم

$$\int_{v_0}^{v} dv = v_{rel}\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M}$$

سرعت خروج گاز در این مدت ثابت فرض شده است. در نتیجه داریم

$$v - v_0 = -v_{rel}\ln\left(\frac{M_0}{M}\right) = -v_{rel}\ln\left(1+\frac{M_0-M}{M}\right)$$

بنابراین، تغییر سرعت موشک در هر بازه زمانی فقط به سرعت خروج گازها (که در خلاف جهت حرکت موشک است) و مقدار نسبی جرم خارج شده در آن بازه زمانی بستگی دارد.

در این مثال $v_0 = 0$, $M_0 / M = (135000/45000) = 3/00$، در نتیجه سرعت موشک در لحظه اتمام سوخت برابر است با

$$v = v_{rel}\ln\left(\frac{M_0}{M}\right) = (1500m/s)\ln 3/00 = 1640m/s$$

اگر نیروهای خارجی گرانشی و مقاومت هوا را به حساب بیاوریم، سرعت نهایی کمتر از این خواهد بود.

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

با فرض اینکه موشک از حالت سکون $(v_0 = 0)$ و با جرم اولیه M_0 شروع به حرکت می‌کند و در لحظه اتمام سوخت سرعت نهایی آن v_f و جرمش M_f است، معادله بالا را درباره موشک می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

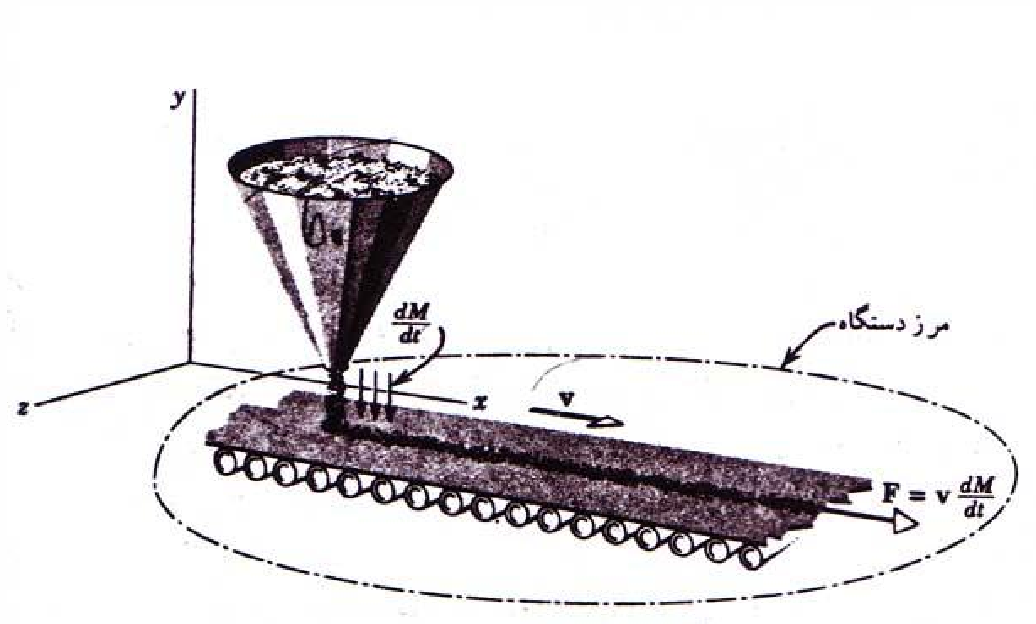
$$\frac{M_f}{M_0} = e^{-v_f / v_{rel}}$$

که در آن v_{rel} سرعت خروج گازهاست.

معادلات کلاسیک موشک (یا هر معادله‌ای که جرم در آن متغیر است) حاکی از آن است که سرعت موشک می‌تواند تا هر مقداری افزایش یابد و این تنها به شرطی امکان دارد که موشک به اندازه کافی گاز از خود خارج کند، به گونه‌ای که جرم باقیمانده آن در حالت نهایی به قدر کافی کوچک باشد. امّا از مکانیک نسبیتی می‌دانیم که سرعت موشک نمی‌تواند به سرعت نور برسد یا از آن بیشتر شود. هنگامی که سرعت موشک به گستره نسبیتی نزدیک می‌شود، معادلات کلاسیک دیگر قابل استفاده نیستند. در این حالت باید تغییرات جرم لختی ذره نسبت به سرعت را در نظر گرفت و از فرمول نسبیتی برای سرعت استفاده کرد. معادلات حاصل، برای موشکی که سرعت آن در گستره سرعتهای نسبیتی است بکار می‌رود.

مثال 3. ذرات شن از یک قیف ساکن با آهنگ dM / dt روی تسمه متحرکی می‌ریزد. تسمه با سرعت v در چارچوب مرجع آزمایشگاه، مطابق شکل (C)، حرکت می‌کند. چه نیرویی لازم است تا تسمه با سرعت یکنواخت v به حرکتش ادامه بدهد؟

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir



شکل (C) مثال3. از یک قیف ذرات شن با آهنگ dM/dt بر روی تسمه متحرکی که با سرعت v در چارچوب مرجع آزمایشگاه حرکت می‌کند، می‌ریزند. نیروی لازم F ، برای آنکه تسمه با سرعت ثابت حرکت کند برابر است با vdM/dt. این قیف در چارچوب مرجع نشان داده شده ساکن است.

این مثال مربوط به حالتی است که در آن نیرو منحصراً از تغییر جرم ناشی می‌شود و سرعت ثابت می‌ماند. در اینجا تسمه با جرم متغیر را دستگاه در نظر می‌گیریم و از معادلـه (4) ب بـرای آن اسـتفاده می‌کنیم. چون سرعت تسمه ثابت است dv/dt را در این معادله برابر صفر قرار می‌دهیم. وانگهی، بـرای ناظری که روی تسمه به حالت سکون ایستاده است به نظر می‌رسد که ذرات شـن (و قیـف) بـا سـرعت افقی v در خلاف جهت سرعت تسمه در آزمایشگاه حرکت مـی‌کننـد. بنـابراین، در معادلـه (4) رابطـه $v_{rel} = -v$ برقرار است. شکل دقیقتر رابطه اخیر به صورت زیر است

$$v_{rel} = u - v$$

امّا چون $u = 0$، نتیجه می‌شود $v_{rel} = -v$. با در نظر گرفتن این روابط داریم

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

$$\mathbf{0} = F_{ext} - v\frac{dM}{dt}$$

و از آنجا

$$F_{ext} = v\frac{dM}{dt}$$

در این مثال، چون جرم دستگاه با گذشت زمان افزایش می‌یابد dM / dt مثبت است. در نتیجه، همان طور که انتظار می‌رود، نیروی خارجی لازم باید در جهت حرکت تسمه وارد شود. توجه کنید که در غیاب اصطکاک، جرم خود تسمه در مسئله منظور نمی‌شود.

توان ایجاد شده توسط نیروی خارجی برابر است با

$$P = F.v = v.F = v.\left(\frac{vdM}{dt}\right) = v^2\left(\frac{dM}{dt}\right)$$

چون v ثابت است، معادله بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$P = \frac{d\left(Mv^2\right)}{dt} = 2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Mv^2\right) = 2\frac{dK}{dt}$$

این رابطه نشان می‌دهد که توان لازم برای حفظ حرکت تسمه، دو برابر آهنگ افزایش انرژی جنبشی دستگاه است. توجه کنید که احتیاجی به در نظر گرفتن انرژی جنبشی خود تسمه نیست زیرا، به دلیل ثابت بودن سرعت، انرژی جنبشی آن تغییر نمی‌کند. واضح است که در این حالت انرژی مکانیکی پایسته نمی‌ماند. نیمه دیگر توان ایجاد شده کجا می‌رود؟ در کدام یک از مثالهای قبل، پایستگی تکانه وجود داشت بدون اینکه انرژی مکانیکی پایسته بماند؟

شبکه ملی مدارس ایران – شبکه رشد
Olympiad.roshd.ir