توزیع ابر الکترونی

داشته‌ایم به اصطلاح قضیه کار و انرژی بوده که می‌گفت $W = \Delta K$ یعنی کار انجام شده روی سیستم (چه داخلی چه خارجی) باعث تغییر انرژی جنبشی سیستم می‌شود.

در تعریف کار دیدیم که ممکن است مقدار کاری که روی یک ذره انجام می‌شود به مسیر (یعنی چگونگی) پیمایش از نقطه ابتدا به نقطهٔ انتها بستگی نداشته باشد. در این صورت می‌توان نقطه‌ای را به عنوان مبدأ در نظر گرفته و کار نیرو را برای همهٔ نقاط دیگر فضا از آن نقطه حساب کرد.

حاصلش تابعی اسکالر برای هر نقطه از فضا خواهد شد. حال تابعی منفی تابع قبلی تعریف می‌کنیم به این تابع به اصطلاح انرژی پتانسیل می‌گویند که نسبت به مبدأ مورد نظر تعریف شده است:

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

طبیعی است که پتانسیل خود مبدأ صفر خواهد بود.

خوب ببینیم خاصیت این تعریف چیست. اگر ذرهٔ ما از $\vec{r}_i$ به $\vec{r}_f$ برود و بعلت نیروی خارجی انرژی جنبشی‌اش تغییر کند می‌دانیم که:

$$W_{i \to f} = \Delta K = K_f - K_i$$

از آنجا که فرض کرده‌ایم که W به مسیر بستگی نداشته باشد می‌توان مسیر حرکت را این گونه برای محاسبه کار در نظر گرفت که ابتدا از i به مبدأ (O) پتانسیل بروی و سپس از آن به f.

$$W_{i\to f} = W_{i\to 0} + W_{0\to f}$$

$$W_{i\to 0} = -W_{0\to i} = -(-U_i) = U_i$$

$$W_{0\to f} = -U_f$$

$$\Rightarrow \quad W_{i\to f} = U_i - U_f$$

طبق قضیه کار و انرژی

$$W_{i\to f} = K_f - K_i$$

$$= U_i - U_f$$

$$\Rightarrow \quad (K_f + U_f) - (K_i + U_i) = 0$$

یا

$$DK + DU = D(K + U) = 0$$

اتفاق جالب آن است که طی این حرکت مقدار $K + U$ ثابت می‌ماند و این همان چیزی است که می‌خواستیم. به $E = K + U$ انرژی مکانیکی ذره می‌گویند که می‌بینید ثابت می‌ماند.

اما این نتیجه چگونه حاصل شد؟ اصل قضیه از آنجا بود که فرض کردیم کار انجام شده روی ذره توسط نیروی مشخص به مسیر حرکت آن بستگی نداشته باشد. در مورد این نیروها بعدها بیشتر بحث خواهم کرد.

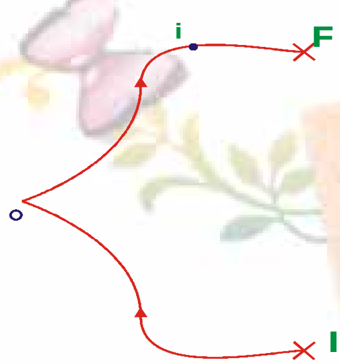
انرژی پتانسیل گفته شده در اصل حاصل از برهمکنش ذرهٔ مورد بحثمان با محیط است. یعنی آنکه بقیه یا جزء خاصی از محیط که نیرو $\vec{F}$ را بر ذره وارد می‌کند این انرژی پتانسیل را برای ذره ایجاد می‌کند.

اما قضیه برای یک سیستم از ذرات چگونه است؟ بدون آنکه تأثیر بقیه محیط را در نظر بگیـریم. آیا در این حالت هم انرژی پتانسیل وجود دارد؟ با توجه به بحث‌های گذشته اگر بخواهد انرژی بقا داشته باشد، باید باز هم در اینجا انرژی پتانسیل داخلی داشته باشیم. به این صورت که $E = K + U$ سیـستم همواره ثابت بماند. در این حالت تعریف انرژی پتانسیل به این گونه است که ابتدا یک حالت مـشخص از سیستم را مبدأ انرژی پتانسیل در نظر می‌گیرند و سپس ذرات را طی مسیر دلخواهی به حالت کنونی‌اش می‌رسانند و طی این عمل مجموعهٔ کارهای انجام شده توسط نیروهای داخلی را در نظر می‌گیرند و منتها آن را بعنوان انرژی پتانسیل این حالت سیستم در نظر می‌گیرند. پس برای یک سیستم دیگـر U ماننـد یک تک ذرهٔ صرفاً تابع نقاط فضا نیست، بلکه تابع حالت شکل‌گیری سیستم است. یعنی اگـر در حالـت تک ذره $U = U(\vec{r})$ بود که $\vec{r}$ مکان ذره بود در این حالت $U = U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ است که N تعداد ذرات سیستم است.

خوب ببینیم ادعاهایمان درست است یا نه. از بخش‌های قبل می‌دانیم که برای یک سیستم:

$$\Delta K = \sum \int_{\vec{r}_{iI}}^{\vec{r}_{iF}} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum W_{i\,(I \to F)}$$

که برای ذره iام انتگرال در مسیری صورت می‌پذیرد که از I به F باشد. حال اگر این مسیر را بـه صورت از I به O و از O به F در نظر بگیریم.



$$\Delta K = \Sigma \left(\int_{\vec{r}_{iI}}^{\vec{r}_{iO}} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \int_{\vec{r}_{iO}}^{\vec{r}_{iF}} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \right)$$

$$= \Sigma \left(W_{i\,(I \to O)} + W_{i\,(O \to F)} \right)$$

$$= \left(\Sigma W_{i\,(O \to F)} \right) - \left(\Sigma W_{i\,(O \to I)} \right)$$

اما U_x برای حالت x را

$$U_x = -\Sigma W_{i\,(O \to x)}$$

تعریف کرده بودیم.

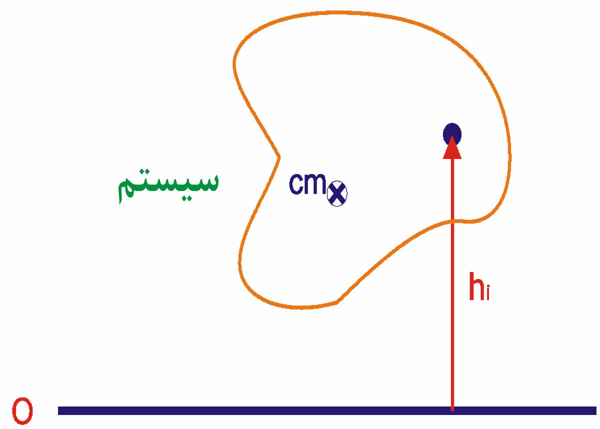
پس:

$$\Delta K = U_I - U_F \qquad \Rightarrow \qquad \Delta (K + U) = 0$$

می‌بینید در این حالت نیز تعریف U ما شکل را حل کرد و دوباره انرژی بقا یافت. البته در این جـا هم باز مفروض اصلی آن است که هر یک از کارهای $W_{i\,(o \to x)}$ به مسیر بستگی نداشته باشد و الا قطعـاً نمی‌توان آن را صرفاً تابع موقعیت نهایی دانست.

چند مثال.

مثال. پتانسیل حاصل نیروی ثقل زمین را برای یک سیستم بدون آنکه سیستم برهمکنش داخلی داشته باشد بدست آورید.



حل. می‌دانیم که کار انجام شده توسط نیروی وزن در جابجایی از یک مبدأ مشخص برای هـر ذره خواهد بود:

$$W_i = -m_i g h_i$$

که h_i ارتفاع ذره از سطح صفر (قراردادی) است. برای کل سیستم:

$$W = \Sigma W_i = -\Sigma\, m_i h_i\, g$$

و پتانسیل سیستم

$$U = -W = \Sigma\, m_i h_i\, g$$

اما طبق تعاریف فصل‌های قبل

$$M\ H_{CM} = \Sigma\, m_i\, h_i$$

$$\Rightarrow U = M_g\, H_{CM}$$

یعنی انرژی ثقلی یک سیستم از ذرات به جرم کل M به ارتفاع مرکز جرم آن (H_{CM}) نـسبت بـه سطح مبدأ بستگی دارد.

در اینجا صحبت از سطح مبدأ شد زیرا مجموعه نقاط مختلفی هستند که همه دارای پتانسیل صفر می‌باشند. یعنی اگر O را مبدأ بگیریم آنگاه همهٔ نقاط هم سطح (هم ارتفاع) با O نسبت به راستای عمود پتانسیلشان همان پتانسیل O خواهد بود. در کل در این مسأله همهٔ سطوح هم ارتفاع، سطوحی هستند که بین نقاط بین آنها اختلاف پتانسیلی وجود ندارد زیرا کار جابجایی در روی این سطوح چون همواره عمود بر نیروست صفر خواهد شد. در مورد خیلی دیگر از پتانسیل‌ها هم این اتفاق خواهد افتاد.

بحث دیگر آن است که اگر سیستم به طور داخلی دارای برهمکنش باشد آنگاه انرژی چگونه خواهد بود؟ در اینجا کافی است که سهم جملات کار نیروی ثقل را با نیروهای داخلی از هم تفکیک کرد.

$$W = \sum W_i = \sum W_i^{(G)} + W_i^{(int)} = \sum W_i^{(G)} + \sum W_i^{(int)} \Rightarrow U = -W = U^{(G)} + U^{(int)}$$

یعنی آن که انرژی پتانسیل سیستم خواهد شد، انرژی پتانسیل حاصل از ثقل (G) به علاوهٔ انرژی درونی‌اش (int). در کل برای هر سیستم می‌توان این تفکیک را انجام داد یعنی آن‌که $U = U^{(ext)} + U^{(int)}$ که انرژی حاصل از برهمکنش سیستم با محیط $U^{(ext)}$ و انرژی حاصل از برهمکنش‌های داخلی $U^{(int)}$ است.

به بیان ریاضی:

$$U^{(ext)} = -\sum \int \vec{F}_i^{(ext)} \cdot d\vec{r}_i$$

$$U^{(int)} = -\sum \int \vec{F}_i^{(int)} \cdot d\vec{r}_i$$

که چون $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(ext)} + \vec{F}_i^{(int)} \Leftarrow U = U^{(ext)} + U^{(int)}$

مثال. انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنر را به ازای مقدار جابجایی Δx از حالت آزاد بدست آورید؟

حل. فرض کنید مبدأ پتانسیل همان حالت آزاد باشد (x_0) یعنی $U(x_0)=0$ طبق محاسبات بخش کار مقدار کار انجام شده توسط فنر طی یک جابجایی از x_0 به x خواهد شد:

$$U = -W_{x_0 \to x} = -\int_{x_0}^{x} -K(x-x_0)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}K(x-x_0)^2 = \frac{1}{2}K\,\Delta x^2$$

این انرژی است که برهمکنش نیروی $-Kx$ با جرم مورد نظر ما ایجاد می‌کند. مقدار انرژی با توجه به شیوهٔ گرفتن مبدأ همواره مثبت است و

$$E = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

بیایید کمی کار ریاضی انجام دهیم. فرض کنید $x_0 = 0$ باشد آنگاه

$$E = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

اگر مشتق زمانی E را بگیریم:

$$\dot{E} = \frac{1}{2}m\dot{v}^2 + \frac{1}{2}k\dot{x}^2$$

$$= m v\dot{v} + k\,x\,\dot{x} \quad = \quad m v a + k\,x\,v$$

$$= (m a + k x)v$$

اما می‌دانیم که $F = m a$ است و $F = -k x$. پس

$$\dot{E} = 0V = 0$$

یعنی همان چیزی که می‌خواستیم. انرژی با زمان تغییر نمی‌کند.

چنانچه معادلهٔ حرکت جرم و فنر را حل می‌کردیم به نتایج زیر می‌رسیدیم:

$$a = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\Rightarrow x = x_0 \cos wt \quad \text{که} \quad , \quad w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$V = \dot{x} = -x_0 w \sin wt$$

حال بیایید جملات انرژی پتانسیل و جنبشی را بنویسیم:

$$K = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m\, x_0^2 w^2 \sin^2 wt$$

$$U = \frac{1}{2}k\, x^2 = \frac{1}{2}k\, x_0^2 \cos^2 w\, t$$

اما $mw^2 = k$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}k\, x_0^2 \sin^2 w\, t$$

بدیهی است که $E = U + K = \frac{1}{2}k\, x_0^2 (\sin^2 wt + \cos^2 wt) = \frac{1}{2}k\, x_0^2$

یعنی انرژی تابع زمان نخواهد شد. مقدار $\frac{1}{2}k\, x_0^2$ در اصل انـرژی پتانـسیل بـه ازای بیـشترین کشیدگی (یا فشردگی) یعنی x_0 است. در این حالت طبیعتاً چون سرعت می‌خواهد تغییـر جهـت دهـد مقدارش صفر است و صرفاً انرژی پتانسیل داریم. می‌شد معادلات را بگونهٔ دیگری ساده کرد.

$$V = -V_m \sin wt \quad \text{که} \quad V_m = w\, x_0$$

$$, w^2 = \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \qquad k = mw$$

$$\Rightarrow \qquad U = \frac{1}{2} m\, w^2\, x_0^2 \cos^2 wt = \frac{1}{2} m\, v_m^2 \cos^2 w\, t$$

$$,\ \ k = \frac{1}{2}\, m v_m^2\, \sin w\, t$$

$$\Rightarrow \qquad E = \frac{1}{2} m v_m^2$$

که این انرژی جنبشی بیشینه است که با انرژی پتانسیل بیشینه برابر است.

اتفاقی که می‌افتد آن است که همواره این دو انرژی به یکدیگر تبدیل می‌شـوند و جمعـشان بقـا خواهد داشت: