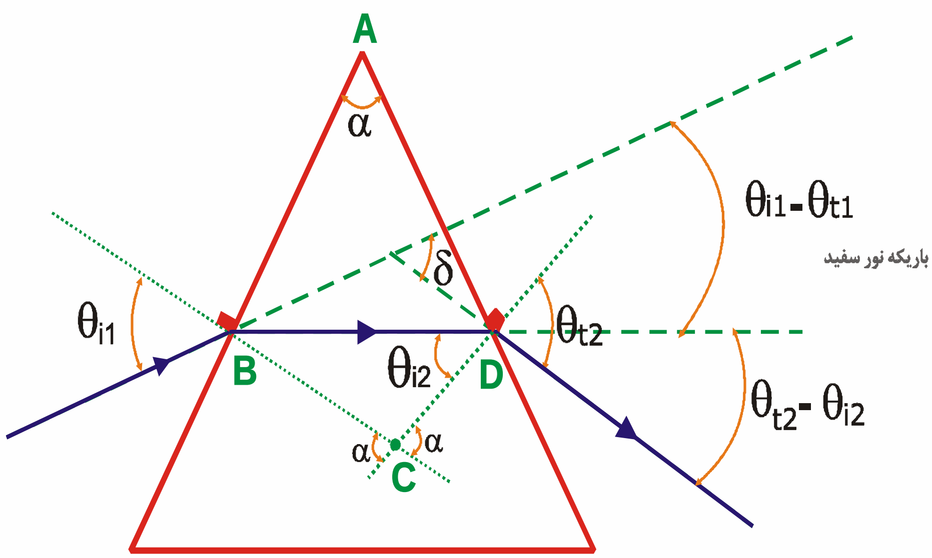
منشورهای پاشنده

شکل زیر، یک منشور را نشان می‌دهد که دارای ضریب شکست n می‌باشد. پرتوی نـوری تحـت زاویهٔ q_{i1} به یک وجه آن تابیده شده و طبق قانون شکست، با زاویهٔ q_{t1} وارد آن می‌شـود. سـپس ایـن پرتو به وجه دیگر منشور تحت زاویهٔ q_{i2} برخورد می‌کند و باز طبق قـانون شکـست، بـا زاویـهٔ q_{t2} از منشور خارج می‌شود.



پرتو تابیده شده به منشور پس از عبور از آن، نسبت به مسیر اولیـه خـود بـه انـدازهٔ زاویـه d، منحرف شده است. به زاویه d زاویه‌ی انحراف می‌گویند.

این پرتو، در اولین شکست به اندازهٔ $(q_{i1} - q_{t1})$ و در دومین شکست به مقـدار بیـشتری و بـه اندازهٔ $(q_{t2} - q_{i2})$ منحرف می‌شود. بنابراین انحراف کل برابر است با:

$$d = (q_{i1} - q_{t1}) + (q_{t2} - q_{i2}) \qquad \textbf{(1)}$$

چون چهارضلعی $ABCD$ دارای دو زاویهٔ قائمه است، باید زاویه $B\hat{C}D$ مکمل زاویهٔ رأس α باشد، در این حالت چون α زاویهٔ خارجی مثلث BCD است، با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش برابر است، یعنی

$$a = q_{t1} + q_{i2} \qquad \textbf{(2)}$$

با قرار دادن ای ن مقدار در رابطهٔ $(\mathbf{1})$ به دست می‌آید:

$$d = q_{i1} + q_{t2} - a \qquad \textbf{(3)}$$

کاری که اکنون می‌خواهیم انجام دهـیم، نوشـتن d بـه صـورت تـابعی از زاویـهٔ فـرودی پرتـو (یعنی q_{i1}) و هم از زاویه‌ی منشور، α، با فرض معلوم بودن آنهاست، با پیـروی از قـانون شکـست، اگـر ضریب شکست منشور n و در هوا $(n_a \approx 1)$ غوطه‌ور باشد، داریم:

$$\frac{\sin q_{i2}}{\sin q_{t2}} = \frac{1}{n}$$

$$\sin q_{t2} = n \sin q_{i2}$$

از آنجا که طبق رابطهٔ (2) می‌توانیم بنویسیم

$$q_{i2} = a - q_{t1}$$

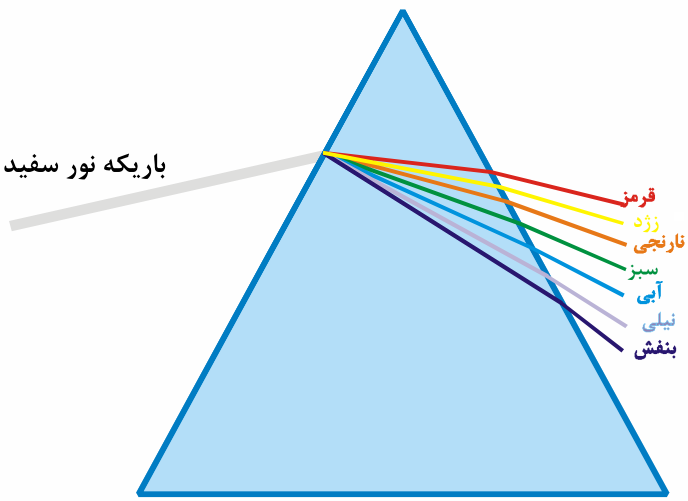
بنابراین:

$$\sin q_{t2} = n \sin (a - q_{t1})$$

در نتیجه بدست می‌آوریم:

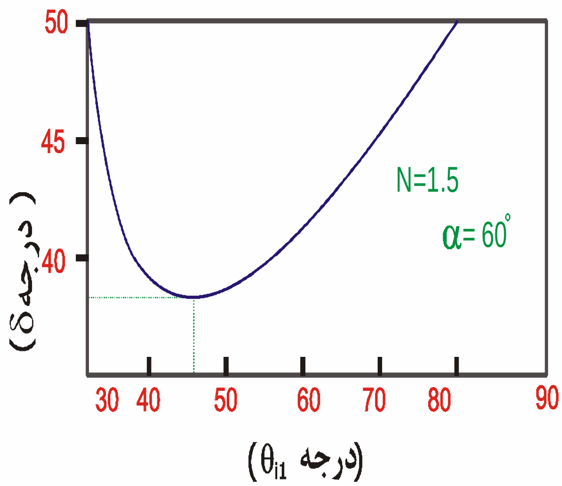
$$q_{t2} = Arc \sin \left[n \sin (a - q_{t1}) \right] \qquad \textbf{(4)}$$

ظاهراً d به ازای n که خودش تابعی از بسامد است افزایش می‌یابد، و بنابراین انحـراف تـابعی از طول موج l می‌باشد. در مورد بیشتر دی‌الکتریکهای شفاف کاربردی، هر چـه طـول مـوج در عبـور از نورمرئی زیادتر شود، $n(\lambda)$ی مربوطه کاهش می‌یابد. بنابراین روشن است که $\delta(\lambda)$ برای نـور قرمـز کمتـر است تا برای نور آبی.



گزارش هیئتهایی که در آخر قرن شانزدهم از آسیا دیدن کرده‌اند، حاکی است که در این منـاطق منشورها را کاملاً می‌شناخته‌اند و این ابزار به علـت توانـایی تولیـد رنـگ، در چـین از ارزش فراوانـی برخوردار بوده‌اند. شماری از دانشمندان این دوران، به ویژه مارسی، گریمالـدی و بویـل، بـا اسـتفاده از منشور مطالعاتی انجام دادند اما انجـام نخـستین بررسـی‌هـای تعیـین کننـده در مـورد پاشـندگی را سرایزاک‌نیوتن کبیر به عهده گرفت. در ششم فوریه سال **1672/1411**، نیوتون مقاله‌ای کلاسیک تحـت عنوان نظریه‌ای نوین در مورد نور و رنگ به انجمن سلطنتی ارائه کرد. او نتیجه‌گیری کرده بـود کـه نـور سفید آمیزه‌ای از رنگ‌های گوناگون است و فرآیند شکست وابسته به رنگ است.

با بازنگری در معادلهٔ (4) ، معلوم می‌شود که باریکه‌ای تکفام هنگام پیمــودن منــشوری مــشخص (یعنی منشوری که در آن n و α ثابت‌اند) ، انحرافی پیدا می‌کند که تنها تــابعی از زاویــهٔ فــرودی، q_{i1} ، برنخستین وجه منشور است. نموداری از نتایج معادله (4) در یک منشور شیشه‌ای نمونه به کار رفتــه در شکل زیر نشان داده شده است:



کوچکترین مقدار d، می‌نیمم انحراف d_m خوانده می‌شود و بنابه دلایل عملی مورد توجــه ویــژه است. d_m را می‌توان به طور تحلیلی با دیفرانسیل گیری از معادلــه (4) و ســپس قــراردادن $\frac{dd}{dq_{i1}}=0$ تعیین کرد. اما بهره‌گیری از روشی غیرمستقیم‌تر، حتماً ساده‌تر خواهد بود. دیفرانسیل‌گیــری از معادلــه (3) و برابر نهادن آن با صفر به معادلهٔ زیر منجر می‌شود:

$$\frac{dd}{dq_{i1}}=1+\frac{dq_{t2}}{dq_{i1}}=0$$

و نتیجه می‌گیریم: $\frac{dq_{t2}}{dq_{i1}}=-1$ ، قانون شکست را در هر سطح مشترک نوشته و از آن

نسبت به زاویه‌ها مشتق می‌گیریم لذا:

$$\sin q_{i1}=n\ \sin q_{t1}\ \overset{\text{مشتق گیری}}{\Rightarrow}\ \cos q_{i1}\ dq_{i1}=n\cos q_{t1}\ dq_{t1}$$

$$\sin q_{t2}=n\ \sin q_{i2}\ \overset{\text{مشتق گیری}}{\Rightarrow}\ \cos q_{t2}\ dq_{t2}=n\cos q_{i2}\ dq_{i2}$$

همچنین توجه داریم که در دیفرانسیل‌گیری از معادلهٔ (3) ، $dq_{t1}=-dq_{i2}$، چون $da=0$. با

تقسیم دو معادلهٔ اخیر به یکدیگر و با نشاندن مقادیر مشتقها، به دست می‌آوریم:

$$\frac{\cos q_{i1}}{\cos q_{t2}}=\frac{\cos q_{t1}}{\cos q_{i2}}$$

یکبار دیگر قانون شکست را به کار برده:

$$\cos q_{t1}=\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin^2 q_{i1}}\quad , \quad \cos q_{i2}=\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin^2 q_{t2}}$$

$$\cos q_{i1}=\sqrt{1-\sin^2 q_{i1}}$$

(4)

$$\cos q_{t2}=\sqrt{1-\sin^2 q_{t2}}$$

لذا می‌توان نوشت:

$$\frac{\sqrt{1-\sin^2 q_{i1}}}{\sqrt{1-\sin^2 q_{t2}}}=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin^2 q_{i1}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin^2 q_{t2}}}$$

با به توان 2 رساندن طرفین به دست می‌آید:

$$\frac{1-sin^2 q_{i1}}{1-sin^2 q_{t2}}=\frac{n^2-sin^2 q_{i1}}{n^2-sin^2 q_{t2}}$$

مقدار q_{i1} که به ازای آن این رابطه برقرار است، همان مقداری است که به ازای آن $\frac{dd}{dq_{i1}}=0$. از

آنجا که $n\neq 1$، نتیجه می‌گیریم که

$$q_{i1}=q_{t2}$$

و بنابراین

$$q_{t1}=q_{i2}$$

معنی این رابطه‌ها این است که ، پرتویی که به ازای آن انحراف می‌نیمم است، به طور متقــارنی از منشور می‌گذرد، یعنی با قاعدهٔ آن موازی است. ضمناً استدلالی موجه برای این مطلب که چرا باید q_{i1} با q_{t2} مساوی باشد وجود دارد، که نه استدلالی آنچنان ریاضی است و نه به خسته‌کنندگی استدلالی است که تاکنون درگیرش بودیم. به طور خلاصه، فرض کنیم یک پرتو می‌نیمم انحرافی پیدا کــرده و $q_{i1}\neq q_{t2}$ است. پس اگر این پرتو را معکوس کنیم، همان مسیر را برمی‌گردد و بنابراین d بدون تغییر باقی خواهد ماند، یعنی $d=d_m$ ولی این رابطه بر وجود دو زاویهٔ فرودی مختلف دلالت مــی‌کنــد کــه بــه ازای آنهــا انحراف می‌نیمم است و می‌دانیم که این موضوع صحیح نیست. بنابراین $q_{i1}=q_{t2}$.

در حالتی که $d=d_m$، پیامد (3) این اســت کــه $q_{i1}=\frac{(d_m+a)}{2}$, $q_{t1}=\frac{a}{2}$ و در نتیجــه آن، قانون شکست در اولین سطح مشترک به

$$n=\frac{sin\left[(d_m+a)/2\right]}{sin\frac{a}{2}} \qquad (5)$$

منجر می‌شود. این معادله شالودهٔ یکی از دقیقترین روش‌های تعیین ضریب شکست یک مادهٔ شفاف را تشکیل می‌دهد. در عمل، منشوری را از مادهٔ مورد نظر می‌سازیم، و سپس با اندازه‌گیری a و $d_m(l)$ را به کارگرفتن معادله (5) در هر طول موج مورد نظر، $n(l)$ محاسبه می‌شود.

منشورهای میان تهی را که وجوه آنها از سطوح شیشه‌ای تخت موازی ساخته شده‌اند می‌توان از مایعات یا گازهایی تحت فشار بالا پرکرد، این سطوح شیشه‌ای خودشان هیچ‌گونه انحرافی پدید نخواهند آورد. تیغهٔ شیشه شکل زیر را در نظر بگیرید که پرتوی تحت زاویه i به آن می‌تابد. علت این عدم تغییر در شکل زیر مشخص است.