

تصاعد هندسی

به دنباله‌ای که رابطه بازگشتی آن $a_n = r a_{n-1}$ باشد یک دنباله هندسی یا تصاعد هندسی گفته می‌شود.

r را قدرنسبت تصاعد هندسی می‌نامیم.

اگر $r > 1$ و $a_1 > 0$ باشد، دنباله اکیداً صعودی خواهد بود و اگر $0 < r < 1$ و $a_1 > 0$ دنباله اکیداً نزولی خواهد بود.

رابطه صریح دنباله هم به صورت $a_n = r^{n-1} a_1$ می‌باشد که واضح نیز به نظر می‌رسد.

مسئله‌ای که در تصاعد هندسی قابل تأمل می‌باشد مجموع جملات آن است.

اگر S_n را مجموع جملات a_1 تا a_n تعریف کنیم:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

آنگاه S_n دنباله‌ای با رابطه بازگشتی زیر خواهد بود:

$$S_n = S_{n-1} + a_n = S_{n-1} + r^{n-1} a_1$$

اما مقدار صریح S_n نیز به سادگی قابل محاسبه می‌باشد که داریم:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

مثال. اگر S_n مجموع جملات دنباله هندسی با عنصر اول a_1 و قدرنسبت r و S_n^1 مجموع جملات

دنباله هندسی دیگری با همان عنصر اول ولی قدرنسبت $\frac{1}{r}$ باشد. رابطه S_n و S_n^1 را بدست آورید؟

حل .

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}, \quad S_n^1 = \frac{a_1\left(\frac{1}{r}n - 1\right)}{\frac{1}{r} - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{S_n}{S_n^1} = \frac{\frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}}{\frac{a_1\left(\frac{1}{r}n - 1\right)}{\frac{1}{r} - 1}} = r^{n-1}$$

