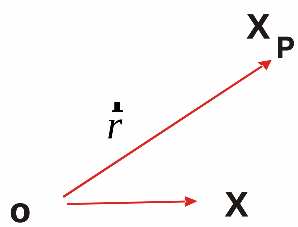
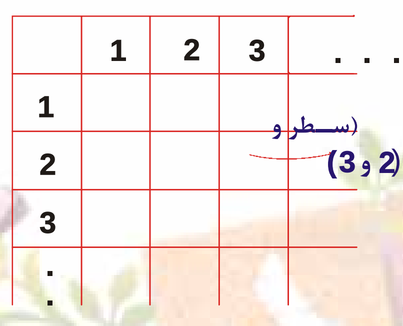
ما برای تعیین مکان یک نقطه در فضا (بطور ریاضی) نیازمند یک چهارچوب مرجع [1] هستیم. ایــن چهارچوب خود در نقطه‌ای مشخص از فضا است و همچنین دارای جهت‌گیری خاصی نسبت به فـضاست. اگر یادتان باشد چون بردارها جهت دارند برای بیان آنها حتماً می‌بایست چهارچوب ما نیز جهت داشــته باشد. مطابق شکل (3-2-1-1) نقطه مبدأ را با o و راستای مرجع را با ox نمایش داده‌ایم.



شکل 3-2-1-1

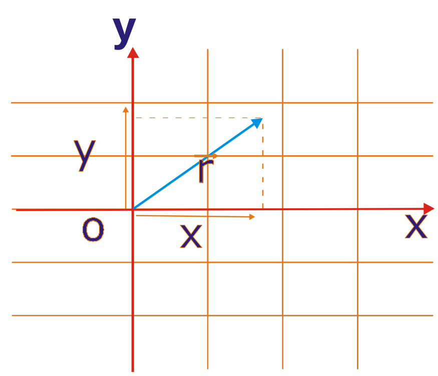
بردار مکان نقطه‌ی P را با $\vec{r}$ [2] نشان داده‌ایم. پیش‌نهاد «دکارت» برای بیان بــردار مکــان آن بود که فضا را شبکه‌بندی کنیم و شبکه‌ها را شماره‌گذاری نماییم. این کاری است که ما اکثراً در جــداول خود انجام می‌دهیم.



شکل 3-2-1-2

حال برای بیان موقعیت نقطه‌ای مورد نظر کافی است (درفضای دو بعدی) زوج مرتب (x,y) را بعنوان (ستون = x) و (سطر = y) بیان کنیم. منتها در فضا (چون پیوسته است) x ها و yها اعداد حقیقی هستند. پس بردار مکان را با بیان مختصات نقطه‌ی انتهایی آن مشخص می‌کنیم:

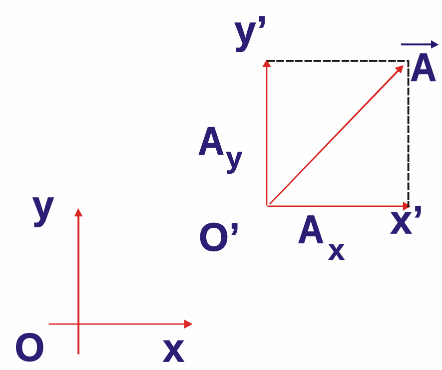
$$\vec{r} \equiv (x, y)$$



شکل 3-2-1-3

به این شیوه بیان، دستگاه مختصات دکارتی یا کارتزین[3] گویند. همان طور که می‌بینید ما به غیر از جهت مرجع ox به جهت مرجع عمود oy نیز نیازمندیم تا قرارداد چگونگی مثبت و یا منفی بودن y را مشخص کنیم. حال می‌بینید که به خیلی از اهداف خود رسیده‌ایم از جمله آن که بردار مکان را با دو مقدار عددی حقیقی (x,y) بیان کنیم که ساختاری کاملاً ریاضی است. همان‌طور که در بخش قبلی گفتیم همه‌ی بردارها در فیزیک مشابه بردار مکان‌اند. مثلاً شیوه‌ی رفتار $\vec{A}$ مانند بردار مکان است. پس ما برای بیان هر برداری مثل $\vec{A}$ کافی است زوج مرتب $\vec{A} = (A_x, A_y)$ را معرفی کنیم. شیوهٔ رفتار مشابه

بدین معناست که چنانچه محورهای مختصات را بچرخانیم این چرخش همـان گونـه A_x, A_y را تغییـر می‌دهد که x و y را تغییر خواهد داد.



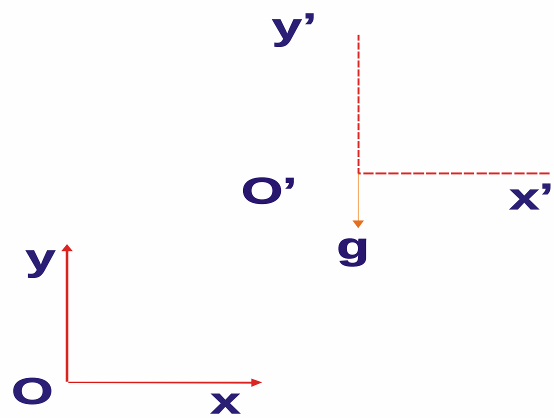
شکل 3-2-1-4

بردار مورد نظر ما $(\vec{A})$ عین یک بردار هندسی مکان با اندازهٔ طولی مؤلفه‌های A_x و A_y عمـل خواهد کرد.

بعنوان مثال یک بیان متعارف برای شتاب ثقل زمین

$$\vec{g}=(0 \ , \ -g)$$

است. به این معنا که محورهای جدید $o'x'$ و $o'y'$ را موازی با ox و oy در نقطه‌ی اندازه‌گیری شتاب ثقل ایجاد می‌کنیم، بردار شتاب ثقل مانند بردار مکانی به طول g از مبدأ o' خواهد بود.

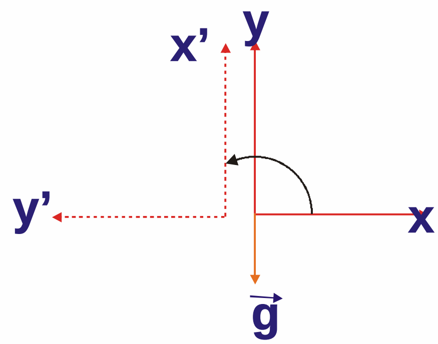


شکل 3-2-1-5

البته حواستان هست که ما همیشه مبدأ را به جایی که بردار هست منتقل می‌کنیم (یا آنکه بـردار را بـه مبدأ o می‌آوریم) در حالت کلی برای تعریف یک بردار مبدأ مشخص لازم نیست ولی برای بعضی بردارها مثل بردار مکان این کار لازم است ولی مثلاً برای بردار g' این لازم نبود و مبدأ هرجایی باشد g' همان است. پس در این حالت و برای همه بردارها داشتن محورهای مختصات یعنی داشـتن جهـات مشخـصه الزامی است.

اما هر نوع زوج مرتب را می‌توان بردار دانست؟

نه چون باید بردار کمیتی فیزیکی که بطور هندسی در فضا قابـل نمـایش اسـت و وجـود دارد را مشخص کند مثلاً زوج مرتب (m,n) که در آن m تعداد نخودها و n تعداد لوبیاهای موجود در یک وعـده آبگوشت است، نمی‌تواند بردار باشد زیرا هیچ مؤلفهٔ x به معنای m و y به معنای n در فضا نمی‌تواند وجود داشته باشد.



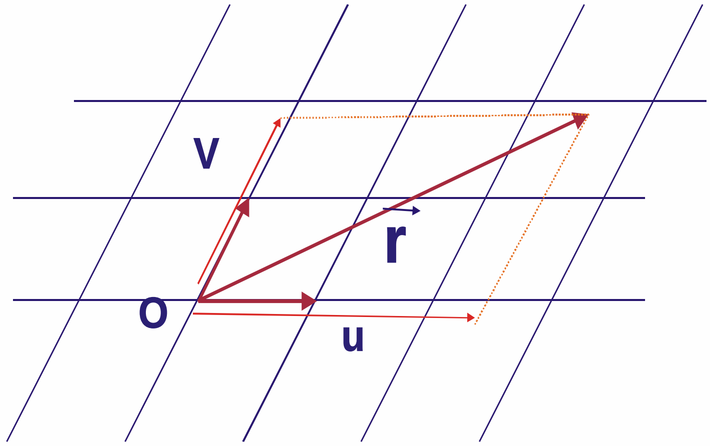
شکل 3-2-1-6

مثلاً اگر من دستگاه مرجع oxy را نود درجه بچرخانم و دستگاه جدید $o'x'y'$ را ایجاد کنم قطعاً در دستگاه جدید مؤلفه‌های بردارها متفاوت با دستگاه قبلی خواهد بود. مثلاً برای شتاب گرانشی در این حالت $\vec{g}=(-g\ ,\ 0)$ خواهد بود، در حالیکه (m,n) هیچ تعییری با این تبدیل نمی‌یابند:

$$\begin{aligned} oxy &: \vec{g}=(0\ ,\ -g) \\ o'x'y' &: \vec{g}=(-g\ ,\ 0) \end{aligned}$$

نود درجه

پس هر نوع زوج مرتب یا هر نوع عنصری که در یک فضای برداری[4] (که نوعی ساختار در ریاضیات است) لزوماً یک بردار فیزیکی نیست. شیوه دکارت صرفاً یک نوع شبکه‌بندی بود. می‌توان شبکه‌بندیهای متفاوت دیگری نیز انجام داد. مثلاً در شبکه‌بندی شکل (3-2-1-7) راستاهای ou و ov عمود نیستند ولی همچنان شما با زوج مرتب (u,v) می‌توانید بطور یکتا یک نقطه را مشخص کنید. منتها چون توابع مثلثاتی برای مثلث قائم‌الزاویه تعریف شده‌اند مختصات‌های قائم (همچون دکارتی) از نظر محاسبات (که بعدها خواهید دید) بهترند.



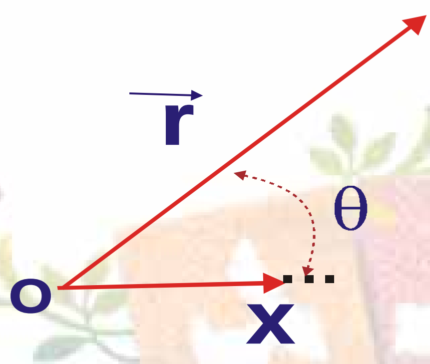
شکل 3-2-1-7

3-2-2. مختصات قطبی[5]

یکی از معروف‌ترین و شاید بتوان گفت نزدیک به ذهن‌ترین شیوه‌های تعیین مکان یک نقطه بیان فاصله نقطه از مبدأ و بیان زاویه راستای آن با محوری مشخص است

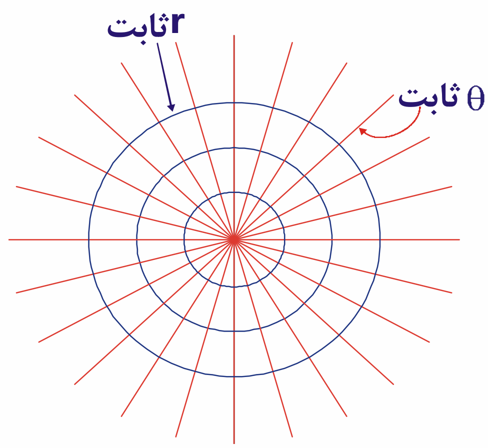
فاصلهٔ از مبدأ $r \ge 0$ (r,q)

زاویه راستای $\vec{r}$ با ox q



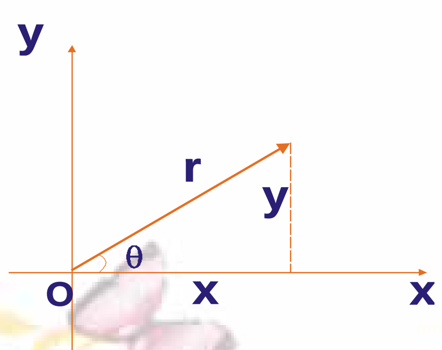
شکل 3-2-2-1

اگر به شیوه‌ی شبکه‌بندی این نوع مختصات توجه کنید خواهید دید که دیگر شبکه از خطوط مستقیم موازی تشکیل نشده است بلکه منحنی‌هایی هستند دایروی که بر خطوط شعاعی (θ ثابت) عمودند.



شکل 3-2-2-2

نحوه تبدیل این دو نوع مختصات دکارتی به قطبی و بالعکس بسیار ساده است.



شکل 3-2-2-3

$$(v,q)\rightarrow(x,y)\begin{cases}x = rcosq\\ y = rsinq\end{cases}$$

$$(x,y)\rightarrow(r,q)\begin{cases}r=\sqrt{x^{2}+y^{2}}\\ q=tan^{-1}(y/x)\end{cases}$$

مختصات قطبی مستقیماً اندازه بردار مکان و جهت آن را ذکر می کند. البته این شیوه برای بیان بردارها مرسوم نیست و فقط برای بیان مختصات مکانی نقاط از آن استفاده می شود (علتش را در بخش تعریف جمع خواهید دید)

نکته جانبی آن تعیین مولفه های یک بردار در این نوع تبدیل است. یعنی اگر ما اندازه ی یک بردار (که معمولاً با $|\vec{A}|$ یا A که $A \geq 0$ نمایش می دهند .) و راستای آن را با محور ox (θ) داشته باشیم آنگاه

$$\vec{A} = (A_x, A_y) = (A\cos\theta, A\sin\theta)$$

که طبق قضیه فیثاغورث $A = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2}}$

عیناً مثل آنچه که برای بردار هندسی مکان صادق بود.

---

[1] Refrence frame

[2] radius

[3] Cartesian coordinates system

[4] Vector space

[5] Polar coordinate