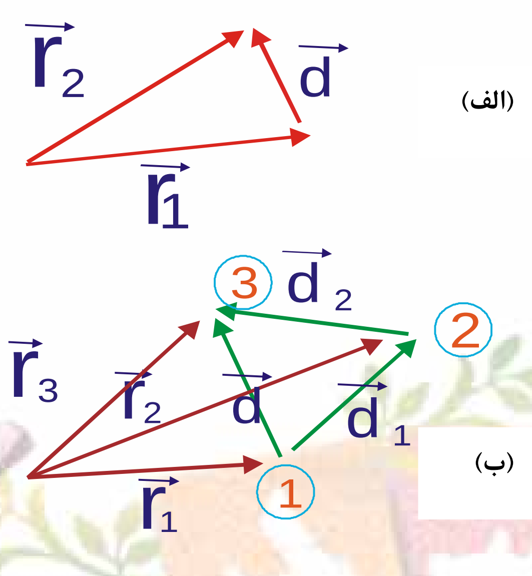
جمع را چگونه تعریف کنیم که بدرد بخورد. بیایید برداری را بنام جابجایی تعریف کنیم و بعد از آن روی آن جمع را تعیین کنیم.

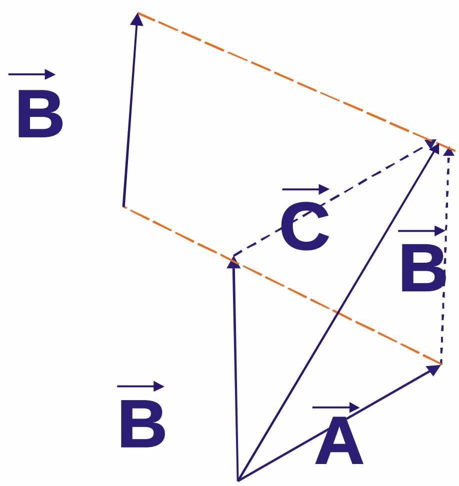
بردار جابجایی[1] را بعنوان اختلاف دو حالت بردار مکان در نظر می‌گیریم. یعنی این که مکان اولیه را به مکان ثانویه وصل می‌کنیم. طبیعتاً چنین برداری در بیان حرکت کاربرد خواهد داشت. حال فرض کنید متحرک از $\vec{r}_1$ به $\vec{r}_2$ ($1 \rightarrow 2$) برود. در این حالت بردار جابجایی را $\vec{d}_1$ بگیرید. سپس از $\vec{r}_2$ به $\vec{r}_3$ ($2 \rightarrow 3$) برود. در این حالت بردار جابجایی‌اش را $\vec{d}_2$ بگیرید. حال اگر بخواهیم $\vec{d}_1+\vec{d}_2$ را خوب تعریف کنیم باید بگونه‌ای تعریف صورت گیرد که $\vec{d}=\vec{d}_1+\vec{d}_2$ برداری بشود که جمع این دو حرکت یعنی از $\vec{r}_1$ به $\vec{r}_3$ ($1 \rightarrow 3$) را نشان دهد. پس جمع این دو جابجایی را برابر جابجایی حاصل از هر دو تعریف می‌کنیم. همانطور که در شکل می‌بینید این کار با ایجاد مثلثی صورت می‌پذیرد که از پشت سر هم قرار دادن $\vec{d}_1$ و $\vec{d}_2$ (بعنوان دو ضلع دیگر مثلث) حاصل می‌شود.



شکل 3-3-2-1

شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

پس طبق تعریفی که کردیم اگر $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$ برای بدست آوردن $\vec{C}$, $\vec{B}$ را جابجا کرده و ابتدای آن را به انتهای $\vec{A}$ می‌چسبانیم و پاره‌خط جهت‌دار (ابتدا A – انتها B) را بعنوان $\vec{C}$ معرفی می‌کنیم.

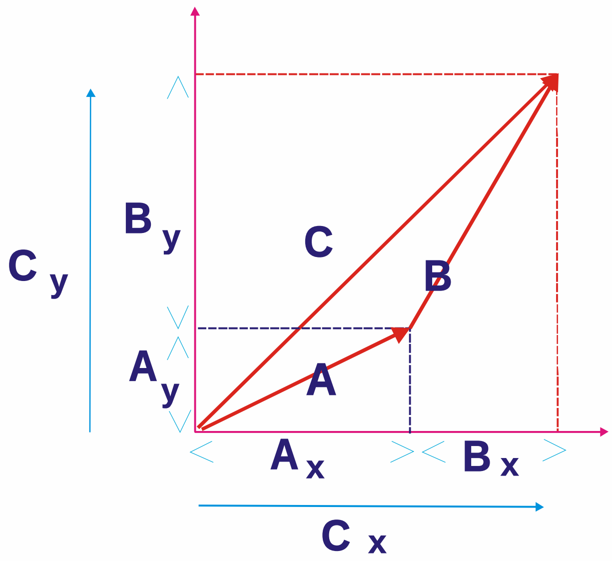


شکل 3-3-2-2

می‌بینید که $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می‌توانند متوازی الاضلاعی را تشکیل دهند که $\vec{C}$ قطر متقاطع بــا A و B را در یک رأس می‌سازد.

بهتر است این تعریف را بطور مؤلفه‌ای بیان کنیم در شکل (3-3-2-3) در مختصات دکــارتی بــه طور بدیهی دیده می‌شود که:

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir



شکل 3-2-3-3

$$\vec{C} = (C_x , C_y) = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_x = A_x + B_x \\ C_y = A_y + B_y \end{cases}$$

امّا اگر می‌خواستیم بردارها را بطور قطبی نمایش دهیم یعنی:

$$\vec{C} = (C, \theta_C)$$

$$\vec{A} = (A, \theta_A) \qquad \vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \not\Rightarrow \begin{cases} C = A + B \\ \theta_C = \theta_A + \theta_B \end{cases}$$

$$\vec{B} = (B, \theta_B)$$

دیگر نمی‌شود جمع بردارها را به جمع مؤلفه‌ها تبدیل کرد. پس این رابطه برای همه نوع مختصاتها و شیوه بیانها صادق نیست.

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

حال که در مختصات دکارتی جمع را بطور مؤلفه‌ای بیان کردیم به سادگی می‌توانید روابط زیــر را تحقیق کنید:

{شکل 3-3-2-1} جابجایی $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

{ شکل 3-3-2-2} توزیع ضرب عدد بر جمع $a\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=a\vec{A}+a\vec{B}$

{ شکل 3-3-2-3} $\left(a+b\right)\vec{A}=a\vec{A}+b\vec{A}$

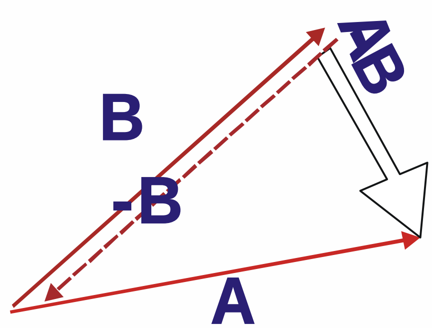
{ شکل 3-3-2-4} شرکت‌پذیری $\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}$

برای کامل شدن مجموعه بردارهایمان، بردار صفر را نیز بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall\vec{A}: \quad \vec{A}+\vec{0}=\vec{A}$$

قرینۀ یک بردار، برداری است که:

$$\left(-\vec{A}\right)+\vec{A}=\vec{0}$$



شکل 3-3-2-4

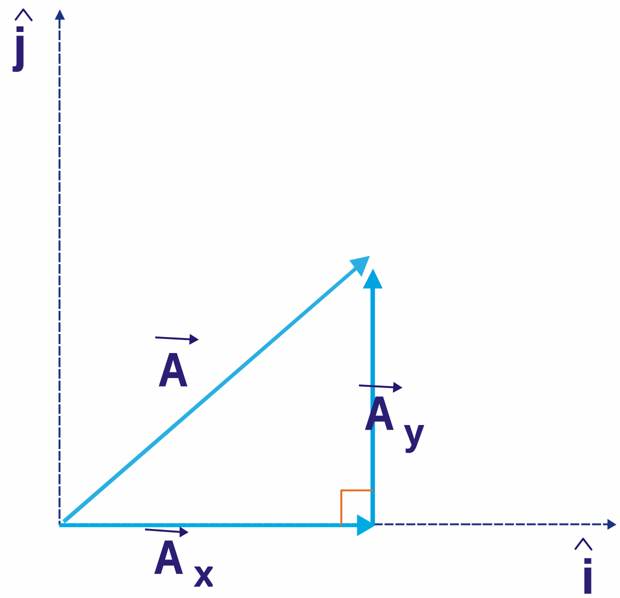
و تفریق دو بردار

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+\left(-\vec{B}\right)$$

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

آنچه در انتهای این بخش می‌ماند مفهوم مؤلفه‌های یک بردار بصورت بردار است. مــی‌دانــیم کــه

$\vec{A} = (A_x , A_y)$. اما از شکل می‌بینید که: $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$



شکل 3-3-2-5

خوب می‌خواهیم رابطه بین A_x , $\vec{A}_x$, A_y , $\vec{A}_y$ را پیدا کنیم. بردار یکه $\hat{i}$ را بدین صورت

تعریف می‌کنیم که نشان دهندهٔ جهت محور x ها باشد یعنی هر برداری در راستای ox را می‌توان نوشت:

$\vec{X} = X\hat{i}$

بردار یکه $\hat{j}$ را هم جهت راستای oy در نظر می‌گیریم پس:

$\vec{A}_y = A_y \hat{j} \quad , \quad \vec{A}_x = A_x \hat{i}$

$\Rightarrow \vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$

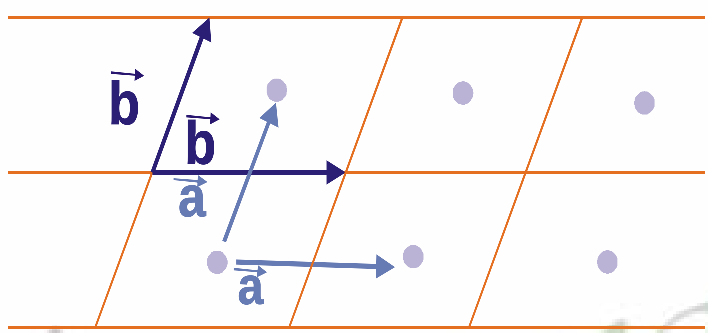
شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

حال مفهوم مؤلفه‌های یک بردار مشخص شد یعنی این که وقتی می‌گوییم در یک فضای دو بعدی مؤلفه‌های بردار $\vec{V}$ در راستاهای $\hat{u}$ و $\hat{w}$ ، V_u و V_w است یعنی: $\vec{V} = V_u\hat{u} + V_w\hat{w}$.

مثال. خرگوشی در باغچه خود ردیفهایی از هویج را می‌کارد بگونه‌ای که در هر ردیف به فاصله d از هم هویج می‌کارد. فاصله ردیفها از هم نیز d است منتها هویجها در ردیفها هم ستون نیستند بگونه‌ای که ردیفها یکی در میان هم ستونند. اختلاف ستونها در این دو نوع ردیف به اندازهٔ $\frac{d}{2}$ است. آیا می‌توانید دو بردار $\vec{b}$, $\vec{a}$ را معرفی کنید که مکان تمام هویجها بطور جدولی از رابطه $\vec{R}_{m,n} = m\vec{a} + n\vec{b}$ بدست آید. (قبل از دیدن حل مثالها حتماً خودتان روی آنها فکر کنید.)

حل.

اگر دقت کنید ساختار هندسی متوازی‌الاضلاع زیر در یک شبکه تکثیر یافته است. پس می‌توان بردارهایی که این متوازی‌الاضلاع را می‌سازند به عنوان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ معرفی کرد.



شکل 3-3-2-6

Olympiad.roshd.ir
شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران

$$\vec{a} = (d \;,\; 0)$$

$$\vec{b} = \left(\frac{d}{2} \;,\; d\right)$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{mn} = m\,(d \;,\; 0) + n\left(\frac{d}{2} \;,\; d\right)$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{mn} = \left((m + \frac{n}{2}) \;,\; n\right) d$$

بدیهی است که با هر حرکت در راستای $\vec{a}$ افقی یکی به m و با هر حرکت در راستای $\vec{b}$ یکی به n افزوده می‌شود و این گونه است که شما می‌توان به هر هویج در هر ردیف و ستون $(m \;,\; n)$ برسید.

---

[1] *Displacement vector*

شبکه ملی مدارس ایران – شبکه رشد
Olympiad.roshd.ir