ضرب داخلی (اسکالر)[1] (نقطه‌ای) دو بردار:

شاید از خود پرسیده باشید این تعریفها بدرد چه می‌خورد. شاید الان متوجه نشوید ولی خواهید دید با این تعاریف و قضایایی که برای این عملگرها اثبات می‌شود می‌توان تا حد زیـادی شـیوهٔ نمـایش (نوتاسیون) روابط را بسیار ساده کرد و به فرمی درآورد که در موقع نگاه به آنها دید مناسبی از کاری که در حال انجامش هستیم بدست آوریم. تحمل کنید، نتایجش را خواهید دید.

ضرب اسکالر از جمله عملگرهایی است که خروجی آن عدد است نه بردار. یعنی $C = \vec{A}.\vec{B}$ ، C عددی حقیقی خواهد بود.

این ضرب را باید بگونه‌ای تعریف کرد که خواص زیر را داشته باشد.

$$[1\text{–}3\text{–}3\text{–}3]\quad \vec{A}.\,\vec{A} \geq 0 \quad , \quad \vec{A} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \vec{A}\,.\,\vec{A} = 0$$

$$[2\text{–}3\text{–}3\text{–}3]\quad \vec{A}\,.\,\vec{B} = \vec{B}\,.\,\vec{A}$$

$$[3\text{–}3\text{–}3\text{–}3]\quad \left(a\vec{A}\right).\;\vec{B} = a\left(\vec{A}\,.\,\vec{B}\right)$$

$$[4\text{–}3\text{–}3\text{–}3]\quad \left(\vec{A}+\vec{B}\right).\,\vec{C} = \vec{A}\,.\,\vec{C} + \vec{B}\,.\,\vec{C}$$

پیشنهاد شما برای یک تعریف مناسب برای ضرب داخلی چیست؟

برای آنکه بتوانیم خواص مورد ذکر را پیاده کنیم بهتر است سعی کنیم کمی نتایج خوب در مـورد ضرب داخلی بدست بیاوریم: که $\hat{u} = \hat{A}$ $\quad \vec{A} = A\,\hat{u}$

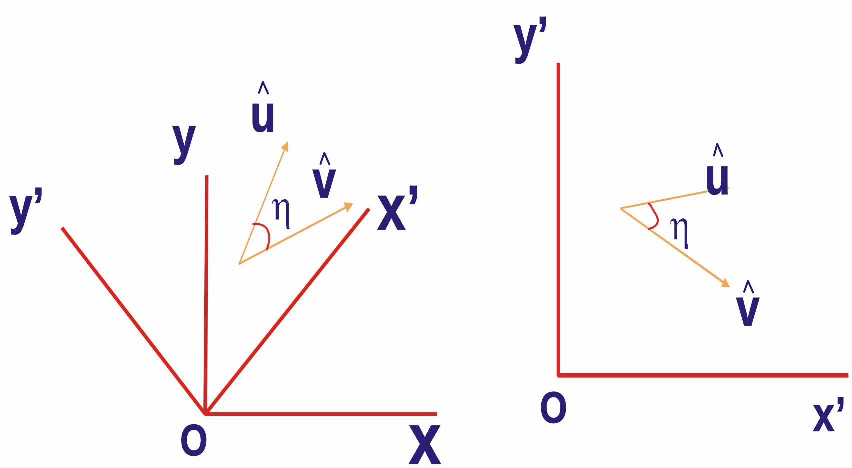
و $\hat{v} = \hat{B}$ $\quad \vec{B} = B\hat{v}$

طبق رابطه سوم

$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A\hat{u}) \cdot (B\hat{v}) = AB\ \hat{u}\hat{v}$

امّا $\hat{u}$, $\hat{v}$ صرفاً کمیاتی هندسی هستند و وابسته به جهتهای مختلف. پس مقدار $\vec{A} \cdot \vec{B}$ برابر با حاصلضرب اندازه‌هایشان در مقداری است که صرفاً به جهات هندسی این دو بردار بستگی دارد. حالا بیایید خود $\hat{u} \cdot \hat{v}$ را ساده کنیم.

هدف ما از تعریف ضرب داخلی، تعریف عدد اسکالری است که کمیتی فیزیکی باشد پس می‌بایست ضرب داخلی نیز تحت دوران و چرخش دستگاه مرجع مقدارش تغییر نکند. (به اصطلاح ناوردا بماند) اگر چهارچوبمان را که oxy است بچرخانیم و به $ox'y'$ تبدیل کنیم آنگاه $\hat{u}$, $\hat{v}$ در دستگاه $ox'y'$ به $\hat{u}'$, $\hat{v}'$ تبدیل می‌شوند.



شکل 3-3-3-1

امّا چون می‌خواهیم ضرب داخلی به جهت‌گیری دستگاهمان بستگی نداشته باشد، باید:

$$\hat{u}' \cdot \hat{v}' = \hat{u} \cdot \hat{v}$$

امّا این چگونه ممکن است، در صورتیکه مقدار این ضرب صرفاً به خواص نسبی $\hat{u}$ به $\hat{v}$ بستگی داشته باشد. خواص آنها یکی اندازه‌اشان است که برای تمام بردارهای یکه نسبت به هم ثابت است و دیگری زاویهٔ هندسی (h) بین این دو است که در هر دو دستگاه یکسان می‌ماند.

پس می‌بایست:

$$\hat{u} \cdot \hat{v} = f(h)$$

امّا طبق خاصیت دوم [3-3-3-2] این بخش:

$$\hat{u} \cdot \hat{v} = \hat{v} \cdot \hat{u}$$

امّا زاویه نسبی $\hat{u}$ به $\hat{v}$ منفی زاویه نسبی $\hat{v}$ به $\hat{u}$ است پس یعنی $f(h)$ زوج است.

$$f(h) = f(-h)$$

حال باید سعی کنیم شرطی روی $f(h)$ بگذاریم. برای این کار نامساوی کوشی ـ شوآرتز[2] را استفاده خواهیم کرد.

فرض کنید دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم و بردار $\vec{c}$ را به صورت مقابل از $\vec{a}, \vec{b}$ می‌سازیم:

$$\vec{c} = \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a} \right) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} \frac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} = 0$$

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{b}$$

$$= \left(\vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a} \right) \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{b} - \frac{\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2}{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

از خاصیت اول داریم که:

$$\vec{c}\,.\,\vec{c} \ \geq\ 0$$

$$\Rightarrow\ \vec{b}\,.\,\vec{b} \geq \frac{(a\,.\,b)^2}{\vec{a}\,.\,\vec{a}}\ \Rightarrow\ (\vec{a}\,.\,\vec{a})\ (\vec{b}\,.\,\vec{b})\ \geq (\vec{a}\,.\,\vec{b})^2 \Rightarrow \sqrt{(\vec{a}\,.\,\vec{a})\,(\vec{b}\,.\,\vec{b})} \geq \left|\vec{a}\,.\,\vec{b}\right|$$

که به نامساوی کوشی _ شوآرتز برای ضرب داخلی معروف است.

اگر این نامساوی را برای $\hat{u}$ و $\hat{v}$ بکار ببریم:

$$-\sqrt{(\hat{u}\,.\,\hat{u})\,(\hat{v}\,.\,\hat{v})} \quad \leq \quad \hat{u}\,.\,\hat{v} \quad \leq \quad \sqrt{(\hat{u}\,.\,\hat{u})\,(\hat{v}\,.\,\hat{v})}$$

ضرب داخلی یک بردار یکه با خودش برای همهٔ بردارهای یکه مقدار زیر است زیرا زاویه یک بردار

با خودش صفر است. قاعده اول $\hat{u}\,.\,\hat{u} = \hat{v}\,.\,\hat{v} = f\ (0)\ \geq 0$

پس برای تابع $f(h)$ خواهیم داشت:

$$\hat{u}\,.\,\hat{v} = f\ (h)$$

$$-f\ (0) \leq f\ (h) \leq f\ (0)$$

طبیعی است که این تابع برای مقادیر h , $h + Yp\ k$ یک مقدار را بدهد زیرا این دو زاویه عینـاً

یک حالت نسبی بین دو بردار یکه ایجاد می‌کنند.

حال اگر تمام خواص $f(h)$ را خلاصه کنیم، خواهیم داشت:

فرض کنید $f_{(0)} \equiv 1$ باشد:

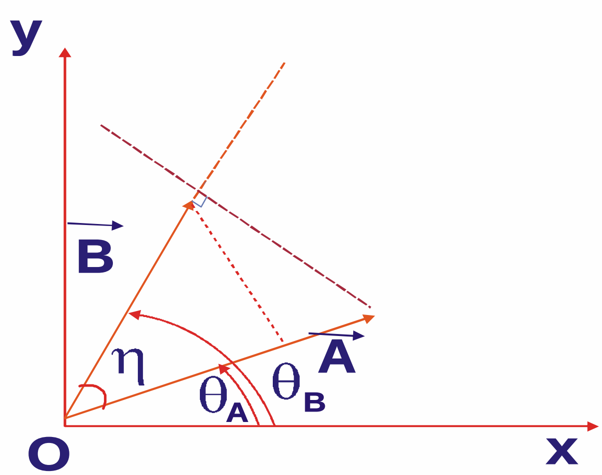
$$\begin{cases} -1 \leq f\ (\eta) \leq 1 \\ f\ (\eta) = f\ (-\eta) \\ f\ (\eta) = f\ (Y\ k\ \pi + \eta) \end{cases}$$

این خواص در تابع $cos\,(\eta)$ یافت می‌شود، پس یکی از تعاریف مناسب ضرب داخلی در فضای هندسی حقیقی $\check{A}\,.\,\check{B} = AB\;cos\,(\eta)$ می‌باشد که h زاویه جهت $\check{A}$ با $\check{B}$ است.

می‌توان روی همین تعریف خواص 1 تا 4 را بررسی کرد منتها کاری کاملاً هندسی است و برای خاصیت 4 کمی سخت است. به جای آن بهتر است تعریف مؤلفه‌ای را بدست آوریم.

همانطور که می‌بینید تعریف هندسی می‌گوید که تصویر یکی از دو بردار را روی دیگری بدست آورده، آنگاه این دو مقدار را در هم ضرب کنید:

$$\check{A}\,.\,\check{B} = B\;(\underbrace{\text{تصویر } \check{A} \text{ روی } \check{B}}_{A\,\text{cos}h}) = A\;(\underbrace{\text{تصویر } B \text{ روی } A}_{B\,\text{cos}h})$$



شکل 3-3-3-2

در رویکرد مؤلفه‌ای می‌باید $cos\,(\eta)$ را برحسب زوایای $\check{A}$, $\check{B}$ با محور مرجع ox بیان کنیم:

اگر بالعکس انتخاب کنیم: $\eta = \theta_B - \theta_A$

$$cos\,(\eta) = cos\,(-\eta)$$

تفاوتی نخواهد داشت.

$$\cos\left(\theta_B-\theta_A\right)=\cos\theta_B\cos\theta_A+\sin\theta_B\sin\theta_A$$

$$\Rightarrow\ A\ .\ B=AB\cos\left(\theta_B-\theta_A\right)=B\cos\theta_B A\cos\theta_A+B\sin\theta_B A\sin\theta_A=A_xB_x+A_yB_y$$

در این حالت خواص 1-4 بدیهی بنظر می‌رسند زیرا برای هر کدام از جملات فوق بطور واضح صحیحند. نکته جالب آن است که: $\vec{A}\,.\,\vec{A}=A^2=A_x^2+A_y^2$

ضرب داخلی در دو حالت صفر خواهد شد:

1- $\vec{A}$ **یا** $\vec{B}$ **و یا هر دو صفر باشند**

2- $\cos(\eta)=0\ \Rightarrow\eta=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\vec{B}\perp\vec{A}$

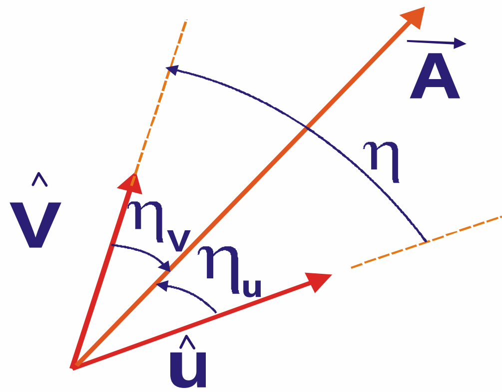
مثال. مقدار اندازهٔ بردار $\vec{A}+\vec{B}$ **را برحسب اندازه‌های** A **و** B **و زاویه بینشان بدست آورید.**

حل.

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|=\sqrt{\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\ .\ \left(\vec{A}+\vec{B}\right)}=\sqrt{\vec{A}\ .\ \left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{B}\ .\ \left(\vec{A}+\vec{B}\right)}$$

$$=\sqrt{\vec{A}\ .\ \vec{A}+2\vec{A}\ .\ \vec{B}+\vec{B}\ .\ \vec{B}}\ =\ \sqrt{A^2+2AB\cos(\eta)+B^2}$$

مثال. مؤلفه‌های بردار $\vec{A}$ **را در راستاهای** $\hat{u}$ **و** $\hat{v}$ **که با هم ناموازیند برحسب ضربهای داخلی بین آنها بنویسید؟**



شکل 3-3-3-3

$$\vec{A} = A_u \hat{u} + A_v \hat{v}$$

$$\begin{cases} \hat{u} \cdot \hat{v} = \cos\eta \\ \hat{u} \cdot \vec{A} = A\cos\eta_u \\ \hat{v} \cdot \vec{A} = A\cos\eta_v \\ \eta = \eta_u - \eta_v \qquad \text{(بطور جبری)} \end{cases}$$

$$\hat{u} \cdot \vec{A} = A_u \hat{u} \cdot \hat{u} + A_v \hat{u} \cdot \hat{v}$$

$$\hat{v} \cdot \vec{A} = A_u \hat{v} \cdot \hat{u} + A_v \hat{v} \cdot \hat{v}$$

$$\Rightarrow A_u = \frac{\hat{u} \cdot \vec{A} - (\hat{u} \cdot \hat{v})\hat{v} \cdot \vec{A}}{1-(\hat{u} \cdot \hat{v})^2} = \frac{\cos\eta_u - \cos\eta\cos\eta_v}{\sin^2\eta}$$

$$A_v = \frac{\hat{v} \cdot \vec{A} - \hat{u} \cdot \hat{v} \ \ \hat{u} \cdot \vec{A}}{1-(\hat{u} \cdot \hat{v})^2} = \frac{\cos\eta_v - \cos\eta\cos\eta_v}{\sin^2\eta}$$

اگر $\hat{u} = \hat{i}$ و $\hat{v} = \hat{j}$ بگیریم چون $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$

$$\Rightarrow A_x = \hat{i} \cdot \vec{A} \qquad , \qquad A_y = \hat{j} \cdot \vec{A}$$

ممکن است این سؤال پیش بیاید که شاید نشود هر برداری را بفرم $A_u\hat{u} + A_v\hat{v}$ نوشت، برای رفع این مشکل کافی است $\hat{i}$ و $\hat{j}$ را برحسب $\hat{u}$ و $\hat{v}$ بسازیم آنگاه چون هر برداری به فرم $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$ می‌توان نوشت قطعاً برحسب $\hat{u}$ و $\hat{v}$ هم نوشته خواهد شد:

$$\begin{aligned} \hat{u} &= u_x\hat{i} + u_y\hat{j} \\ \hat{v} &= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{دو معادله دو مجهول}} \quad \begin{aligned} \hat{i} &= \frac{v_y\hat{u} - u_y\hat{v}}{v_y u_x - u_y v_x} \\ \hat{j} &= \frac{v_x\hat{u} - u_x\hat{v}}{v_x u_y - u_x v_y} \end{aligned}$$

شرط آنکه این جوابها موجود باشند آنست که:

$$u_x v_y - v_x u_y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_y}{u_x} \neq \frac{v_y}{v_x} \Leftrightarrow \tan\theta_u \neq \tan\theta_v \Leftrightarrow \theta_u \neq \theta_v$$

یعنی دو بردار همراستا و موازی نباشند کافی است. حال از روی روابط فوق می‌توان مؤلفه‌های u و v را برحسب مؤلفه‌های x و y نوشت:

$$A_u = \frac{\begin{vmatrix} A_x & v_x \\ A_y & v_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}} \quad ; \quad A_v = \frac{\begin{vmatrix} u_x & A_x \\ u_y & A_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}}$$

ضرب داخلی یکی از پرکاربردترین ضربهای برداری است که خیلی از نمادگذاریها را ساده می‌کند. مثلاً: کار یک نیرو را می‌توان با $\vec{F}\cdot\vec{d}$ در جابجایی $\vec{d}$ نمایش داد یا شار عبوری از یک سطح را با $r\vec{v}\cdot\vec{S}$ که $\vec{S}$ بردار سطح مورد نظر است.

نوع دیگری ضرب نیز در بردارها وجود دارد که چون نیازمند فضای سه بعدی است تعریف آن را به بعد از بخش فضای سه بعدی موکول می‌کنیم.

[1] *Scaler product*

[2] *Cauchy_ Schwarz inequality*