تا بحال در مورد تابع و مفهوم حد صحبت کرده‌ایم. شاید فکر کرده باشید که بیان حد صرفاً برای این بوده که بخواهیم بعضی مفاهیم مجهول را در ریاضیات جای بدهیم و تعریف معینی برای آنهـا ایجـاد کنیم. البته این کار را می‌کنیم ولی راستش را بخواهید تمام آن تعاریف تنها بـه درد مفهـوم «مـشتق»[1] می‌خورد.

مشتق یکی از پرکاربردترین عملیاتهایی است که در ریاضـیات کـاربردی مـصرف مـی‌شـود. در فیزیک هم نقش بسیاری دارد.

همهٔ قضایا از تعریف سرعت بطور لحظه‌ای شروع شد. قبل از آنکه سراغ تعریف سرعت لحظـه‌ای برویم بهتر است کمی در مورد سرعت بطور کلی صحبت کنیم.

اگر فرض کنیم متحرکی صرفاً بر روی خط راستی می‌تواند حرکت کند آنگاه مکان او در هر لحظـه نسبت به یک مبدأ می‌تواند با متغیر x که فاصله (جبری) آن از مبدأ است تعیین شود. طبیعی است که x تابعی از زمان است زیرا در هر لحظه متحرک (اگر ذره فرض شود) صرفاً در یک نقطه وجود دارد پس $x = x(t)$.

امّا سرعت متوسط متحرک را چگونه تعریف می‌کنیم؟

چنانچه فرض کنیم متحرک در لحظه‌ای که ساعتمان t_1 نشان می‌دهد در مکان x_1 و در لحظـه‌ای که ساعتمان t_2 را نشان می‌دهد در مکان x_2 باشد آنگاه سرعت متوسـط حرکـت متحـرک را در ایـن فاصلهٔ زمانی:

$$V_{\text{متوسط}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

---

[1] *Derivative*

تعریف می‌کنیم. یعنی این که چه مقدار جابجا شده بخش بر مدت زمانی که این جابجایی صـورت گرفته است. مثلاً اگر لاک‌پشتی از 3 متری مبدأ به 10 متری آن طی 1 دقیقه برود سرعت آن خواهد شد (بطور متوسط):

$$V_{\text{لاک‌پشت}} = \frac{10-3}{1} = 7m/\min = 420m/h$$

حال فرض کنید مکان متحرک را برحسب زمان در هر لحظه داشته باشیم یعنی این که تابع $x(t)$ را داشته باشیم آنگاه طبیعتاً سرعت متوسط بین تمام لحظات را خواهیم داشت. آیا مـی‌تـوانیم سـرعتی تعریف کنیم (و محاسبه کنیم) که لحظه‌ای باشد؟ یعنی متعلق به مثلاً لحظهٔ t باشد نه بازهٔ زمانی خاصی؟

این کار را می‌توان با هر چه کوچکتر کردن بازهٔ زمانی محاسبه سرعت انجام داد.

چطور؟ یعنی اینکه بیاییم تا حد ممکن $t_2 - t_1$ را کوچک کنیم و $x_2 - x_1$ متناظر آن را بیـابیم و حاصل تقسیم $\dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ را به عنوان سرعت لحظهٔ t_1 بیان کنیم.

خُب برای انجام این کار لحظه‌ای را که می‌خواهیم سرعت را حساب کنیم t و بازهٔ زمانی را از t تـا $t+h$ در نظر می‌گیریم در این صورت اندازهٔ بازهٔ h خواهد بود.

امّا تعریف سرعت لحظه‌ای خواهد شد:

خیلی کوچک: h

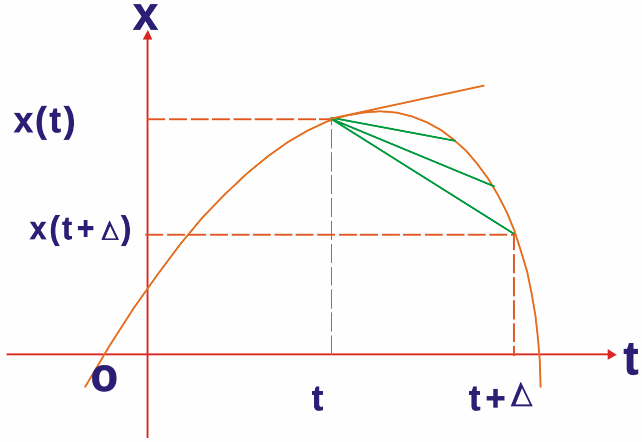
$$V(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{t+h-t} = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

ایده‌آل ریاضی این تعریف آن است که h به سمت صفر برود و از همین جاست کـه سـروکلهٔ حـد پیدا می‌شود:

$$V(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

تمام بحثهای قبلی ما برای بیان این حد بود.

قبل از این که به سراغ چند محاسبه برویم بیایید کمی در مورد تعبیر هندسی این تعریف صحبت کنیم. طبیعتاً $x\left(t\right)$ چون تابعی از t است. می‌توان آن را به صورت نمودار کشید، همانطور که در بخش تابع گفتیم: در شکل زیر دو لحظهٔ t و $t+\Delta$ مشخص شده که مقادیر x آنها $x(t)$ و $x\left(t+\Delta\right)$ می‌باشند. طبق تعریف سرعت متوسط بازهٔ Δ مقدار سرعت متوسط:



شیب خط واصل $= \dfrac{x\left(t+\Delta\right)-x\left(t\right)}{\Delta} = V_{(t,\ t+\Delta)}$

که اگر بطور هندسی دقت کنید همان تانژانت خط واصل دو نقطه نسبت به محور ot یا همان شیب خط واصل خواهد شد.

از طرفی می‌بینید هر چقدر Δ را کوچکتر کنیم، خط واصل بر منحنی منطبق‌تر می‌شود. تا آنجایی که هنگامی که $\Delta \rightarrow 0$ می‌رود، این شیب همان شیب خط مماس بر منحنی در زمان t می‌شود. پس تعبیر هندسی سرعت لحظه‌ای شیب خط مماس بر منحنی است:

شیب مماس بر منحنی در لحظه t $\quad V(t)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{x(t+\Delta)-x(t)}{\Delta}=x(t)$

مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ x بنابر تعریف خواهد بود:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

که f' تابعی است که در هر نقطه مشتق تابع f را در آن نقطه می‌دهد.

تابع در یک نقطه در صورتی مشتق‌پذیر است که حد معرفی شده وجود داشته باشد یعنی آنکـه مماس بر منحنی f در نقطهٔ x معنا داشته باشد.

مثال. تابع مشتق تابع $f(x)=2x-5$ را بدست آورید؟

حل.

$$f(x+h)=2(x+h)-5$$

$$f(x)=2x-5$$

$$f(x+h)-f(x)=2h$$

$$\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}=2$$

که همان شیب خط درآمد: $\quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}=2$

مثال. تابع مشتق تابع $f(x)=x^2+x-3$ را بدست آورید؟

حل.

$$f(x+h)=(x+h)^2+(x+h)-3=x^2+x-3+2xh+h+h^2$$

$$f(x+h)-f(x)=(2x+1)h+h^2$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}2x+1+h=2x+1$$

این رابطه شیب خطوط مماس بر منحنی سهمی x^2+x-3 را در طول x می‌دهد.

طبیعتاً می‌توان از خود تابع مشتق نیز مجدداً مشتق گرفت به تابع حاصل تابع مشتق دوم تابع اول می‌گویند یعنی: $f''(x):=\left(f'(x)\right)'$

به همین صورت مشتق nاُم تابع f حاصل از n بار مشتق‌گیری از f است:

$$f^{(1)}(x):=f'(x) \qquad f^{(n)}(x):=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

مثال. مشتق دوم تابع مقابل را بگیرید: $x(t)=\frac{a}{2}t^2+V_0t+x_0$

حل. مشتق نسبت به زمان را معمولاً با $(\,\dot{}\,)$ نمایش می‌دهند بجای $(\,)'$.

مشتق اول:

$$x(t+h)=\frac{a}{2}(t+h)^2+V_0(t+h)+x_0=\frac{a}{2}t^2+V_0t+x_0+ath+V_0h+\frac{a}{2}h^2$$

$$\dot{x}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}=\lim_{h\to 0}at+V_0+h=at+V_0$$

مشتق دوم:

$$\dot{x}(t+h)=a(t+h)+V_0=at+V_0+ah$$

$$\ddot{x}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\dot{x}(t+h)-\dot{x}(t)}{h}=\lim_{h\to 0}a=a$$

همانطور که می‌بینید در رابطهٔ حرکت شتاب ثابت، مشتق اول x (مکان) نسبت به t (زمان) سرعت ($\dot{x}$) و مشتق دوم آن شتاب ($\ddot{x}$) می‌شوند.

می‌ماند آنکه در این بخش مشتق چند سری از توابع مشهور را بگیریم.

مثال. **مشتق تابع $f(x)=x^n$ به ازای $n\in$ چه می‌شود؟**

حل.

$$f(x+h)=(x+h)^n=\sum_{i=0}^{n}x^{n-i}h^i\times C_n^i$$

اتحاد فوق به بسط نیوتن مشهور است کـه در آن $C_n^i=\frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i(i-1)\ \dots\ 1}$ مـی‌تـوان C_n^i را بصورت $C_n^i=\frac{n!}{(n-i)!\ i!}$ نیز نوشت که $m!=m(m-1)\dots 1$

$$f(x+h)=x^n+nx^{n-1}h+\sum_{i=2}^{n}C_n^i x^{n-i}h^i$$

دو جملهٔ اول را از بسط بیرون کشیده‌ایم طبیعتاً $C_n^1=n$ و $C_n^0=1$ می‌باشند.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h+\sum_{i=2}^{n}C_n^i x^{n-i}h^i}{h}=\lim_{h\to 0}nx^{n-1}+\sum_{i=2}^{n}C_n^i x^{n-i}h^{i-1}$$

h^{i-1} به ازای $i\geq 2$ هیچگاه 1 نمی‌شود یعنی $i-1$ هیچگاه صفر نمی‌شود و همواره توانی از h در هر جمله وجود دارد که حد آنها صفر است پس صرفاً nx^{n-1} خواهد ماند.

$$\left(x^{n}\right)' = nx^{n-1}$$

که این نتیجه با مثالهای قبلی تطابق دارد.

مثال. تابع مشتق تابع $f(x)=\sin x$ چه می‌شود؟

حل.

$$f(x+h)=\sin(x+h)=\sin x\cos h+\sin h\cos x$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}=\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

یادتان هست در بخش حد بدست آورده بودیم که $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$. این رابطه در اینجا به درد می‌خورد منتها می‌ماند محاسبهٔ $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}$ که از روی همان رابطهٔ فوق قابل محاسبه است بدین صورت که:

$$\cos h=\cos 2\frac{h}{2}=1-2\sin^{2}\frac{h}{2}$$

$$\cos h-1=-2\sin^{2}\frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^{2}\frac{h}{2}}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\lim_{h\to 0}\sin\frac{h}{2}=-1\times\lim_{h\to 0}\sin\frac{h}{2}=0$$

پس در نهایت صرفاً جملهٔ دوم در f' باقی خواهد ماند یعنی:

$$(\sin(x))'=\cos x$$

مثال. تابع مشتق تابع $f(x)=\cos x$ چه می‌شود؟

حل. می‌توان مجدداً تعریف حد را نوشت ولی همچنین می‌توان از اتحاد $-cosx = sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ استفاده کرد. چنانچه آرگومان[2] یک تابع (آرگومان همان ورودی است) به مقدار مشخص a جابجا شود طبیعتاً شیب منحنی و مشتقات منحنی هم به همان مقدار a جابجا خواهند شد یعنی:

$$g(x)=f(x-a)$$

$$\Rightarrow g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f((x-a)-h)-f(x-a)}{h}=f'(x-a)$$

پس:

$$(cosx)'=\left(-sin\left(x+\frac{p}{2}\right)\right)'=-cos\left(x+\frac{p}{2}\right)=-sin\,x$$

طبق تعریف مستقیم هم داشتیم:

$$(\cos x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\,(\cos h-1)}{h}+\lim_{h\to 0}\left(-\sin x\,\frac{\sin h}{h}\right)=-\sin x$$

یک سری دیگر از توابع پرکاربرد توابع نمایی هستند یعنی $f(x)=a^x$.

امّا مشتق این گونه توابع چه خواهند شد. چنانچه تعریف مشتق را برای این گونه توابع استفاده کنید خواهید دید که در محاسبهٔ حد مشتق به مشکل برمی‌خورید.

$$\left(a^x\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^h a^x-a^x}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{\left(a^h-1\right)}{h}$$

---

[2] Argument

حال می‌ماند محاسبه حد $\lim_{h\to 0}\frac{\left(a^{h}-1\right)}{h}$ که از نظر مقداری $\frac{0}{0}$ است و وجود ندارد پس صرفاً حد آن موجود است. به هر صورت هر چه که باشد این مقدار صرفاً تابع a است و به x ربطی ندارد یعنی:

$$\left(a^{x}\right)' \propto a^{x}$$

امّا برای محاسبهٔ آن ابتدا حد جالبی را بایست بگیریم. البته این حد را نمی‌گیریم بلکه فرق نشان می‌دهیم می‌تواند مقدار مشخصی را داشته باشد.

مثال. نشان دهید $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ مقدار مشخصی خواهد داشت.

حل. چنانچه مثلاً $n = 10^{5}$ قرار دهید ماشین‌حساب به شما عدد **2/7182** را تا چهار رقم بعد از اعشار خواهد داد. امّا بیایید با بسط نیوتن این رابطه را بسط دهیم.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\sum_{i=0}^{n}C_{n}^{i}\left(\frac{1}{n}\right)^{i}=1+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^{2}}+\cdots$$

چنانچه بخواهیم روی C_{n}^{i} بحث کنیم داریم که:

$$C_{n}^{i}=\frac{\overbrace{n\left(n-1\right)\times\ldots\times\left(n-i+1\right)}^{i\ \text{جمله}}}{i\left(i-1\right)\ldots 1}=\frac{n^{i}+P_{i-1}^{(i)}\left(n\right)}{i\,!}$$

که $P_{i-1}^{(i)}\left(n\right)$ چند جمله‌ای از مرتبه $i-1$ از n است یعنی:

$$P_{i-1}^{(i)}\left(n\right)=\sum_{j=0}^{i-1}a_{j}^{(i)}\,n^{j}$$

دلیل این امر واضح است زیرا در تمــام جمــلات صــورت C_n^i، n هــیچ مــضربی نــدارد و مقــدار حاصلضرب حتماً شامل n^i بدون هیچ ضریب عددی اســت و باقیمانــدهٔ جمــلات چنــد جملــه‌ای $P_{i-1}^{(i)}$ خواهند بود. پس:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{i=0}^{n}\left\{\frac{n^i}{i\,!}\left(\frac{1}{n}\right)^i+\frac{P_{i-1}^{(i)}(n)}{n^i\ i\,!}\right\}=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i\,!}+\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i\,!}\left(\frac{P_{i-1}^{(i)}(n)}{n^i}\right)$$

حال می‌ماند محاسبهٔ حد $n\to\infty$ رابطهٔ بالا. ابتدا نشان می‌دهیم $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_{i-1}^{(i)}(n)}{n^i}=0$

این امر از آنجا نشأت می‌گیرد که تمام جملات موجود در $P_{i-1}^{(i)}$ از توانهای n کوچکتر از i حاصــل شده‌اند یعنی:

$$P_{i-1}^{(i)}(n)=a_{i-1}^{(i)}n^{i-1}+a_{i-2}^{(i)}n^{i-2}+\ \cdots+a_{o}^{(i)}$$

که در نتیجه:

$$\frac{P_{i-1}^{(i)}(n)}{n^i}=a_{i-1}^{(i)}\frac{1}{n}+a_{i-2}^{(i)}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{a_o^{(i)}}{n^i}$$

و همانطور که می‌دانید حد $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ است پس تمام جملات بالا صفر خواهند بود. پس:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i\,!}$$

امّا این $\sum$ چقدر می‌شود و آیا اصلاً وجود دارد. مقادیر زیر را مقایسه کنید:

$$2 \times i\,! = i\,(i-1)\ \ldots\ 2 \times 2$$

$$2^i = 2 \times 2\ \ldots \times 2$$

واضح است که $2^i \geq 2\times i!$ است یا $i! \geq 2^{i-1}$ پس $\frac{1}{i!} \leq \frac{1}{2^{i-1}}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i\,!} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{2^i} = 2\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

قبلاً حساب کرده‌ایم که $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$ پس $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i\,!} \leq \varepsilon$

در نهایت خواهیم داشت:

$$0 < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i\,!} \leq \varepsilon$$

پس قطعاً این مقدار یک عدد متناهی[3] (غیر بی‌نهایت) است.

مقدار این عدد را طبق تعریف $''e''$ می‌گیریم:

$$\boldsymbol{l} := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i\,!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots \cong 2/718281828$$

این عدد دومین عدد گنگ مشهور بعد از $''\pi''$ است.

حال تابع نمایی e^x [4] را تعریف می‌کنیم که معنای بتوان رساندن l به مقدار x است که $x \in$ می‌تواند باشد. گاهی به فرمهای دیگر نیز این تابع را می‌نویسند:

$$e^x = \exp(x)$$

---

[3] Finite

[4] Exponential

چنانچه بطور بسط بخواهیم این تابع را بنویسیم خواهیم داشت:

(زیاد سخت نگیرید) $$e^{x}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{nx}C_{nx}^{i}\,\frac{1}{n^{i}}$$

که طبق بحثهای قبلی خواهد شد:

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{nx}\frac{(nx)^{i}}{i\,!\,n^{i}}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{i}}{i\,!}$$

می‌بینید که:

$$e=e^{1}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1^{i}}{i\,!}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i\,!}$$

بحث ما از محاسبهٔ حد $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{a^{h}-1}{h}$ به اینجا کشید. حال می‌خواهیم ایـن حـد را بـرای $a=1$ حساب کنیم.

$$\lim_{h\to0}\frac{e^{h}-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{h^{i}}{i\,!}-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1+h+\frac{h^{2}}{2}+\ldots-1}{h}=1+\lim_{h\to0}\left(h/2+h^{2}/6+h^{3}/24+\cdots\right)$$

بدیهی است که قسمت سمت راست صفر خواهد شد پس:

$$\lim_{h\to0}\frac{e^{h}-1}{h}=1$$

نتیجه جالب این حد آن است که

$$\left(e^{x}\right)'=e^{x}\lim_{h\to0}\frac{e^{h}-1}{h}=e^{x}$$

یعنی آنکه e^x تابعی است که مشتق آن با خودش یکی است. حال برای هر عدد دلخــواه a کــافی است بنویسیم $a=e^{\log_e a}$ که معمولاً $\log_e$ را با $\ln$ نمایش می‌دهند. با این کار

$$a^h = e^{(\ln a)h} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\ln a\, h)^i}{i\,!}$$

و با جایگذاری در روابط قبلی خواهید رسید به:

$$\left(a^x\right)' = \ln(a)\, a^x$$