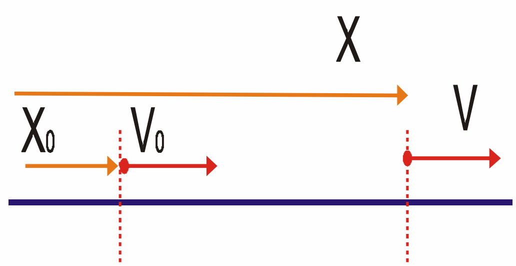
مفهوم کار – قضیه کار و انرژی

جای بردار نیرو استفاده کنیم.

بیایید ببینیم برای حرکت شتاب ثابت می‌توانیم چنین کاری را انجام دهیم. در حرکت شتاب ثابت

مستقیم الخط، اگر یادتان باشد روابط مکان و سرعت بر حسب زمان به فرم



$$x = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

$$V = v_0 + a t$$

بودند.

حال بیایید زمان را حذف کنیم و بگونه‌ای V را با x به طور مستقیم ربط دهیم. برای این کار

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$\Rightarrow \quad x - x_0 = v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{a}{2}\left(\frac{v - v_0}{a^2}\right)^2$$

$$= \frac{2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 + v_0^2 - 2vv_0}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

یعنی $v^2 - v_0^2 = 2a\,(x - x_0)$

می‌بینید که اندازه سرعت از این رابطه به ازای مقادیر مکان ذره بدست می‌آید:

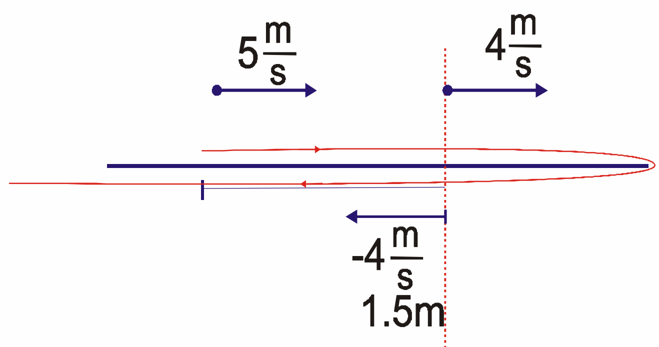
مثلاً اگر $x_0 = 0$ و $v_0 = 5\ m/s$ و $a = -3\ m/s^2$ در نظر بگیریم آنگـاه در $x = 1/5\ m$ مقـدار

سرعت

$$|V| = \sqrt{25 - 2\times3\times1.5} = \sqrt{16} = 4\ m/s$$

البته این سرعت در دو زمان مختلف ایجاد می‌شود یکی وقتی $V = +\mathbf{4}\ m/s$ و دیگری زمانی کـه

$V = -\mathbf{4} m/s$ است.



حال بیایید رابطهٔ اصلی را در $\frac{m}{2}$ یعنی نصف جرم ذره ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = ma\,(x - x_0)$$

$$= F\,(x - x_0)$$

می‌بینید که اندازهٔ نیروی ثابت در مقدار جابجایی تفاضل چیزی را به ما می‌دهد که وابسته به توان دوم سرعت است. طبق تعریف به $W = F\ d$ (که $d = x - x_0$ مقدار جابجایی است) کار[1] نیروی F طی جابجایی d گویند.

و همچنین طبق تعریف به $K = \frac{1}{2} m v^2$ انرژی جنبشی[2] ذره (در آن لحظهٔ خاص که سرعتش v است) گویند.

پس خواهیم داشت:

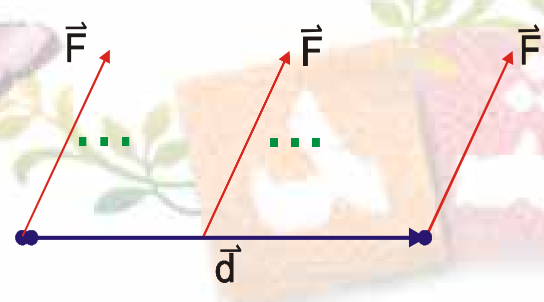
$$K - K_0 = W$$

می‌بینید که در روابط قبلی ما با تعریف چیزی به نام کار توانستیم روابط اسکالری را ایجاد کنیم که به نوعی سرعت را بر حسب مکان بیان می‌کنند.

اما بیایید کار را در حالت کلی تعریف کنم و سپس قضایای موجود را به حالت عامتر، تعمیم دهم.

کار نیروی ثابت در جابجایی مستقیم:

اگر بردار ثابت نیروی $\vec{F}$ به ذره‌ای وارد شود که جابجا $\vec{d}$ را طی کرده بنظر شما چه تعریفی از کار (که کمیتی اسکالر است) می‌تواند بدرد بخورد؟



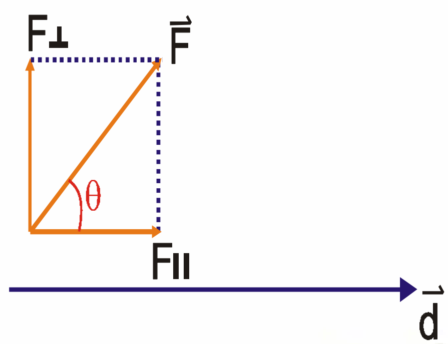
در عرایض قبلی دیدیم که $W = Fd$ شد که F و d در یک راستا بودند اگر شتاب منفی بود یعنی F در جهت خلاف x و d مثبت بود آنگاه Fd منفی می‌شد زیرا شتاب از سرعت می‌کاست. پس می‌بینید که جهت F و d مهم بودند. اما آیا به نظرتان خوب است که کار را منحصر به مؤلفه مماسی $\vec F$ بر $\vec d$ کنیم؟

چون به نظر $\vec F$ که عمود بر $\vec d$ باشد، یعنی آنکه عمود بر بردار سرعت است، یعنی آنکه شتاب بر $\vec v$ عمود می‌شود. اگر یادتان باشد در این حالت اندازه سرعت تغییر نمی‌کرد. زیرا

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d\,\vec v.\vec v}{dt} = a\vec V \,.\, \frac{d\vec v}{dt} = 2\vec v \,.\, \vec a = 0$$

اگر $\vec a \perp \vec v$

پس اگر بخواهد کار باعث تغییر اندازه سرعت شود می‌بایست به طور مماسی تعریف شود.



مقدار کار را $W = F_{\parallel} d$ تعریف می‌کنم اما می‌دانیم $F_{\parallel} = F \cos q$

$$\Rightarrow W = F\, d \cos q$$

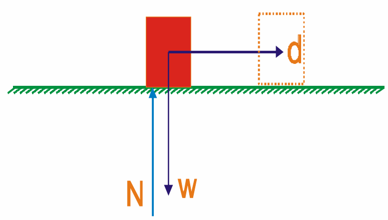
که q زاویهٔ راستاهای $\vec F , \vec d$ است. اما این همان تعریف ضرب داخلی بود. پس $W = \vec F \,.\, \vec d$

این تعریف را برای یک جابه‌جایی راست $\vec{d}$ و نیروی ثابت $\vec{F}$ انجام دادیم.

طبیعی است اگر $\vec{F}$ نیروی خالص وارد بر ذره باشد آن وقت دیگر جابجایی راست $\vec{d}$ معنایی ندارد زیرا قطعاً مؤلفهٔ $\vec{F}$ که عمود بر $\vec{d}$ است جهت سرعت را تغییر می‌دهد پس این صرفاً یک جزء از کار کل انجام شده روی ذره است این صرفاً کار نیروی $\vec{F}$ است.

مثال. جسمی به جرم m روی سطح افقی بدون اصطکاکی می‌لغزد و با سرعت ثابت به جلو می‌رود. مقدار کار نیروی وزن و نیروی عکس‌العمل سطح برای جابجایی d روی سطح بدست آورید.

حل.



واضح است که W و N هر دو بر $\vec{d}$ عمودند پس:

$$W_w = 0$$

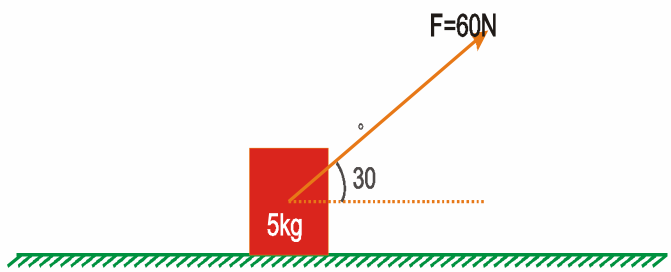
$$W_N = 0$$

اما کار کل چیست؟ کار کل کار نیروی برآیند وارد بر جسم است:

$$W_{\text{کل}} = \vec{F}_{\text{برآیند}} \cdot \vec{d} = (\sum \vec{F}_i) \cdot \vec{d} = \sum_{\text{عوامل مختلف}} (\vec{F}_i \cdot \vec{d}) = \sum_{\text{کار هر عامل}} W_i$$

می‌بینید این تعریف باعث می‌شود کار کل برابر با مجموع کار هر عامل نیروزا شود.

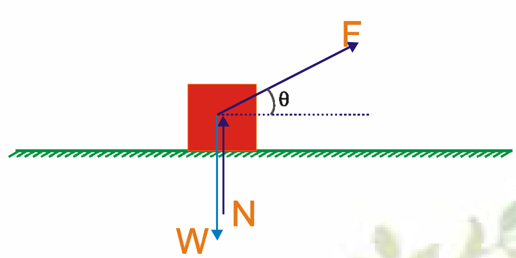
مثال. جسمی روی سطح بدون اصطکاکی از حالت سکون با نیروی $60\ N$ که با افق زاویه 30 درجه می‌سازد کشیده می‌شود. جرم جسم $5\ kg$ است. اگر $1\ m$ جابجا شود طی این مسافت مقدار کار نیروی F و مقدار کل کار انجام شده روی جسم چقدر خواهد بود؟



حل. ابتدا مسأله را کلی و به طور پارامتری حل می‌کنیم.دراینجا چون جسم شتاب صرفاً افقی دارد.

$$W = N + F \sin q$$

$$ma = F \cos q$$



کار نیروی‌های N و W بعلت تعامد با مسیر صفر است و صرفاً همان کار نیروی F است که باقی می‌ماند.

$$W_F = \vec{F} \cdot \vec{d} = F\ d\ \cos q$$

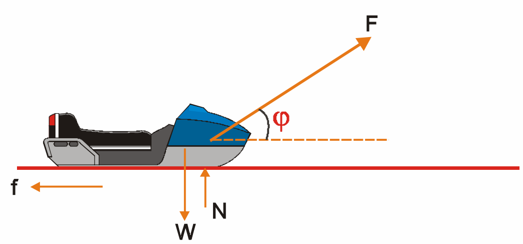
$$W_N = W_W = 0$$

$$\Rightarrow \quad W = W_F = F\ d\ \cos q = 60_N \times 1_m \times \cos 30^0 \approx 51/96\ J$$

واحد کار در SI را J (ژول[3]) می‌نامند. این واحد حاصل از $N\,m$ است یعنی $J = 1\ N\,m$.

مثال. پسری سورتمه‌ای به وزن $5\ kg$ را با سرعت ثابتی با طنابی می‌کشد که طناب با راستای افق زاویهٔ 45 درجه می‌سازد. ضریب اصطکاک جنبشی کف سورتمه با زمین 0/2 است. ابتدا مقدار نیروی کشش طناب را بدست آورید. سپس کار نیروی طناب و اصطکاک زمین را روی سورتمه حساب کنید. کار کل را نیز بدست آورید. (جابجایی را $1\ m$ فرض کنید)

حل.



چون شتاب نداریم برآیند نیروها می‌بایست صفر شود.

$$\vec{F}+\vec{W}+\vec{N}+\vec{f}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x - f = 0 \\ F_y + N - W = 0 \\ f = mN \quad , \ F_x = F\cos j \quad , \ F_y = F\sin j \end{cases}$$

$$F_x = F\cos j = f = mN = m(W - F_y) = m(W - F\sin j)$$

$$\Rightarrow \quad F\cos j = m(W - F\sin j)$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{mW}{\cos j + m\sin j}$$

مقدار کار این نیرو در جابجایی d:

$$W_F = Fd\cos j = \frac{mW\cos j}{\cos j + m\sin j}d$$

از آنجا که نیروی برآیند صفر است و $f = F_x$ در نتیجه کار نیروی $\vec{f}$ منفی کار نیروی $\vec{F}$ است.

$$W_f = -W_F = \frac{mW\cos j}{\cos j + m\sin j}d$$

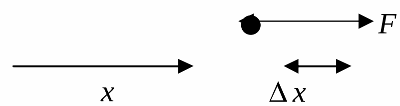
به طور عددی $\quad W_F \approx 11/55\ J$

کار نیروی متغیر یک بعدی

تا بحال نیروهایی را بررسی کرده‌ایم که اندازهٔ آنها ثابت بوده و در جابجایی مستقیمی منتقل می‌شدند. این بار می‌خواهم نیرو را متغیر در نظر بگیرم یعنی در هر مکانی مقدار خاص خودش باشد. در بخش‌های بعدی در نهایت همه چیز را متغیر در نظر می‌گیریم و کار را به طور کلی تعریف می‌کنم.

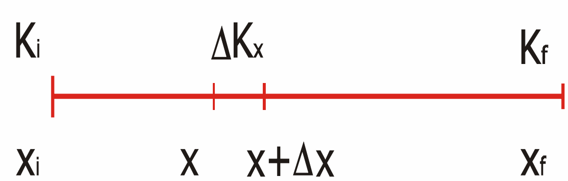
فرض کنید نیروی F، بفرم $F(x)$ باشد یعنی در هر مکان x مقدار خاص خودش را داشته باشد.

بیایید ببینیم این نیروی در نقطه x طی جابجایی کوچک Δx چه اثری روی حرکت دارد.



اگر Δx کوچک باشد یعنی F تقریباً همه جای آن یک مقدار است یعنی همان $F(x)$ در این صورت مسأله همان مسأله قبلی خواهد بود یعنی نیروی ثابت $F(x)$ با جابجایی Δx که کارش را $\Delta W = F(x)\,\Delta x$ تعریف کردیم. این باعث تغییر انرژی جنبشی جرم به اندازه $\Delta K = F(x)\,\Delta x$ خواهد شد.

خوب ΔK یعنی $K_{x+\Delta x} - K_x$ حال اگر جابجایی را از x_i تا x_f (و بزرگ) در نظر بگیریم در اصل می‌خواهم رابطه‌ای از روی نیرو بدست بیاورم که $K_f - K_i$ که K_i در x_i و K_f در x_f است را به من بدهد.



$$K_f = K_i + \sum_{x=x_i}^{x_f} DK_x$$

$$|\Delta x| << |x_f - x_i|$$

طبیعی است که می‌توان نوشت:

$$K_f = K_{x_f} = K_{x_f - \Delta x} + \Delta K_{x_f - \Delta x} = K_{x_f - \Delta x} + \Delta W\,(x_f - \Delta x)$$

$$= K_{x_f - \Delta x} + F(x_f - \Delta x)\,\Delta x$$

$$K_{x_f - \Delta x} = K_{x_f - 2\Delta x} + \Delta W\,(x_f - 2\Delta x)$$

$$= K_{x_f - 2\Delta x} + F(x_f - 2\Delta x)\,\Delta x$$ و همچنین

$$\vdots$$

و بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$K_f = K_i + \sum_{x=x_i}^{x_f} \Delta W\,(x) = K_i + \sum_{x=x_i}^{x_f} F(x)\,\Delta x$$

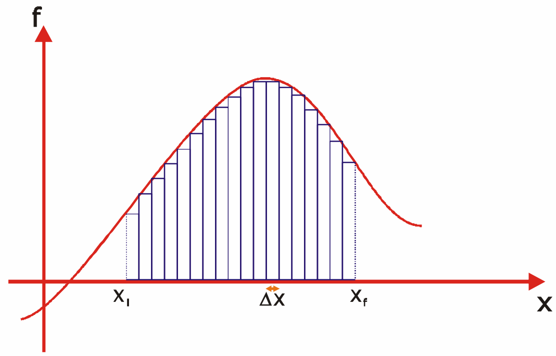
پس:

$$\Delta K_{\text{کل}} = K_f - K_i = \sum_{x=x_i}^{x_f} F(x)\,\Delta x \qquad \lim \Delta x \to 0$$

حال این تعریف خوبی برای کار است که از آن تغییرات انرژی جنبشی بدست می‌آید.

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=x_i}^{x_f} F(x)\,\Delta x$$

چنانچه نمودار F را بر x بکشیم و به تعبیر سیگماهای فوق توجه کنیم خواهیم دید در اصل سیگماهای فوق مجموع مساحت‌های مستطیل‌هایی به عرض Δx و ارتفاع $F(x)$ است و وقتی حد $\Delta x \to 0$ را وارد کنیم این مجموع مساحت‌ها، مساحت زیر نمودار $F(x)$ از x_i تا x_f خواهد شد. این همان تعریف انتگرال است که در بخش ریاضی بررسی‌اش کردیم.



پس کار نیرو F در حرکتی از x_i به x_f خواهد شد.

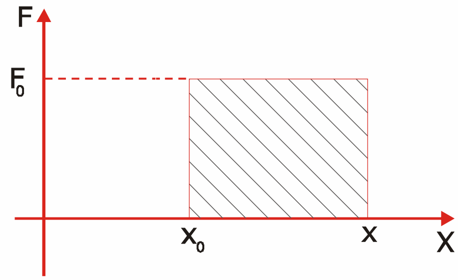
$$W_{(x_i \to x_f)} = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$$

اما آیا هر نیرویی را می‌توان بر حسب مکان بیان کرد؟ قطعاً نه این در صورتی است که نیرو در مکان مشخص همواره مقدار مشخصی باشد. اگر نباشد چه می‌شود؟ آنگاه انتگرال فوق لزوماً برای همهٔ حرکات ممکن یک مقدار نخواهد شد. یعنی:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F\,dx$$

را باز برای هر حرکت می‌توان حساب کرد و در این جا هم طبیعتاً $\Delta K = W$ خواهد شد، منتها این انتگرال برای همهٔ حرکت‌های ممکن بین x_i و x_f یک مدار نخواهد شد چون حرکت‌های مختلف می‌تواند F های مختلفی را در یک x ایجاد کند. ولی اگر عامل ایجاد نیرو یک نوع خاص باشد که در هر مکان بتوان مقدار آن را تعیین کرد $(F(x))$ آنگاه این انتگرال برای همهٔ حرکت‌های ممکن تحت آن عامل خاص یکی خواهد شد.

مثال. نیروی ثابت F_0 به ذره‌ای وارد می‌شود تحت جابجایی از x_0 تا x مقدار کار این نیرو چقدر خواهد بود؟



حل. $W_{(x_0 \to x)} = \int_{x_0}^{x} F_0 \, dx = F_0 (x - x_0)$

طبق رویکرد هندسی هم این انتگرال همین خواهد شد.

مثال. فرض کنید نیروی مقاومتی روی جسم ما اثر می‌کند که متناسب با سرعت و در جهت عکس آن است. آیا کار این نیرو را می‌توان بین فاصله x_0 تا x حساب کرد؟ (برای همهٔ حرکت‌ها)

حل. خیر

$$F = -aV = -a\dot{x}$$

اما ممکن است در نقطه x_0 سرعت V_0 یا $2V_0$ یا هر چیز دیگری باشد یعنی در هر x خاصی می‌توان Vهای مختلفی برای حرکت‌های مختلفی در نظر گرفت. چنانچه V_0 بزرگ‌تر شود در کل نیروی F در هر فاصله x_0 تا x بزرگتر می‌شود و در نتیجه کارش هم منفی‌تر خواهد بود. پس یکی از شرایط اساسی آنکه کار نیرو برای همهٔ حرکت‌های ممکن تحت نیروی F قابل تعریف باشد این است که F تابع سرعت نباشد. البته در این مورد خاص محاسباتی می‌توان انجام داد:

$$F = ma = m\ddot{x} = m\frac{d\dot{x}}{dt}$$

$$= m\frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = m\frac{(d\dot{x})}{dx}\dot{x}$$

$$m\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -a\dot{x} \qquad \Rightarrow \qquad dx = -\frac{m}{a}d\dot{x}$$

$$\Rightarrow \ W = \int F\,dx = \int +a\dot{x}\frac{m}{a}d\dot{x} = \int +m\dot{x}\,d\dot{x}$$

$$= \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

که همان نتیجه حاصل از تعریف کار بود (چیز جدیدی نیست) در این مسأله ابتدا باید بر حسب شرایط مسأله ابتدا x راحل کرد آنگاه با آن رابطه V و x را بدست آورد.

مثلاً در جایی نوشته بودم

$$d\dot{x} = -\frac{a}{m}dx \quad \overset{\int}{\Rightarrow} \ V - V_0 = -\frac{a}{m}(x - x_0)$$

که از طریقی به غیر از محاسبهٔ کار نیرو رابطهٔ خود سرعت با مکان بدست آمد.

حال اگر کار را هم بخواهیم حساب کنیم به طور معکوس حسابش می‌کنیم یعنی:

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}m(V^2 - V_0^2) = \frac{1}{2}m\left(\left[\frac{a}{m}(x_0 - x) + V_0\right]^2 - V_0^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{a^2}{m}(x - x_0)^2 - aV_0(x - x_0)$$

که می‌بینید کار نیرو به غیر از به x به v_0 هم بستگی دارد. البته ظاهراً ممکن است این عدد مثبت شود در حالیکه می‌دانیم نیرو در جهت خلاف و همیشه خلاف جابجایی است و قطعاً کارش منفی

است. این مشکل وجود ندارد زیرا چنانچه بخواهد ذره از x_0 تا x برسد می‌بایست سرعتش در آنجا غیر صفر باشد (یا حداقل صفر شود) اگر جهت اول سرعت را $V_0 > 0$ بگیریم آنگاه باید حتماً $V \geq 0$ باشد تا ذره به x رسیده باشد پس طبق معادلهٔ اول:

$$0 \leq V \quad \Rightarrow \quad 0 \leq V_0 - \frac{a}{m}(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad V_0 \geq \frac{a}{m}(x - x_0) \geq \frac{1}{2}\frac{a}{m}(x - x_0) \geq 0$$

چنانچه رابطهٔ کار را بازنویسی کنیم:

$$W = a\,(x - x_0)\left(\frac{a}{2m}(x - x_0) - V_0\right)$$

که با شرط قبلی قطعاً منفی است.

آنچه از بخش ریاضی بیاد دارید آن بوده که طبق قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌بایست مشتق تابع اولیه انتگرال ده را بدهد.

پس اگر $F(x)$ باشد آنگاه کارش $\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx = W(x) - W_0$ خواهد بود پس :

$$F(x) = \frac{dW(x)}{dx}$$

این را در مورد نیروی مثال قبل هم می‌شود بررسی کرد با فرض آنکه بدانیم حرکت با یک V_0 خاص شروع شده:

$$W=(x-x_0)\left(\frac{a}{2m}(x-x_0)-V_0\right)$$

$$\frac{dW}{dx}=a\left(\frac{a}{2m}(x-x_0)-v_0\right)+a\left(x-x_0\right)\frac{a}{2m}$$

$$=\frac{a^2}{m}(x-x_0)-a\,v_0$$

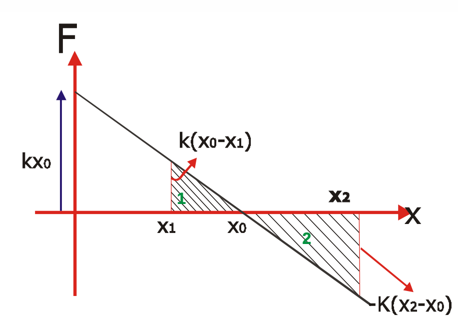
اما $$v-v_0=-\frac{a}{m}(x-x_0)$$

$$\Rightarrow\frac{dW}{dx}=a\left(\frac{a}{m}(x-x_0)-v_0\right)=a\left(-v\right)=-a\,v=F$$

که می‌بینید همان نیروی فرضی اول است.

مثال. نیروی یک فنر به فرم $F(x)=-k(x-x_0)$ است که x_0 مکان انتهای فنر در حالت آزادش است. کار این نیرو را در جابجایی از x_1 تا x_2 حساب کنید؟

حل.



$$W=\int_{x_1}^{x_2}F\left(x\right)dx$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}-k\,(x-x_0)\,dx$$

$$=-\frac{k}{2}x^2+k\,x_0\,x\Big]_{x_1}^{x_2}$$

$$=\frac{1}{2}k\,(x_1^2-x_2^2)+k\,x_0\,(x_2-x_1)$$

از راه مساحت هم به همین رابطه خواهیم رسید. دو مثلث داریم که یکی دارای مساحت مثبت و یکی منفی است.

$$S_1 = \frac{1}{2}k\ (x_0 - x_1) \times (x_0 - x_1) \qquad S_2 = -\frac{k}{2}(x_2 - x_0) \times (x_2 - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad W = S_1 + S_2 = \frac{k}{2}\left\{(x - x_0)^2 - (x_2 - x_0)^2\right\}$$

که همان رابطهٔ قبلی است با ظاهر جبری البته بهتر. می‌بینید در اصل کار در جابجایی x_1 تا x_2 برابر است با $W = \frac{k}{2}(\Delta x_1^2 - \Delta x_2^2)$ که Δx را مقدار کشیدگی (یا فشردگی) فنر نسبت به حالت آزاد (x_0) نشان می‌دهد.

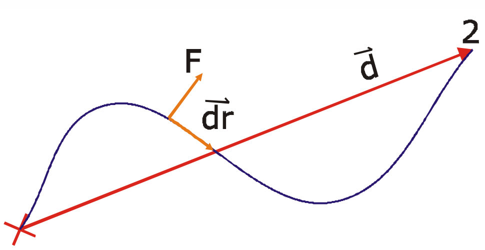
حال که حالت تک بعدی را تا حد مناسبی بسط دادیم بهتر است سراغ حالت دوبعدی برویم.

تعریف کار در حالت دو بعدی با نیروی ثابت

برای سادگی ابتدا می‌رویم سراغ نیروی ثابت منتها بر مسیری منحنی شکل.

برای جابجایی مستقیم $\vec{d}$ رابطه را $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ تعریف کردیم برای این حالت باز باید تعریف مناسبی بیابیم که تغییر انرژی جنبشی را به ما بدهد. در این حالت به شکل جالبی تعریف

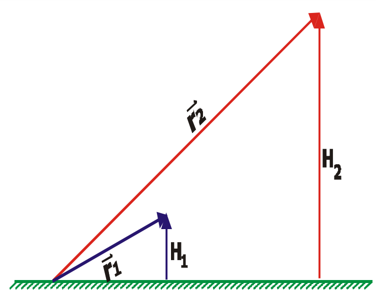
$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$



جواب خواهد داد که دلایلش را بعداً خواهم گفت.

مثال. نیروی گرانشی (ثقل) در سطح زمین که می‌دانید به فرم $\vec{W} = -m\, g\, \hat{j}$ است. کار این نیرو در جابجایی از بردار مکان $\vec{r}_1$ به $\vec{r}_2$ چقدر است؟

حل.



$$\begin{aligned} W &= -m\, g\, \hat{j} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\ &= mg\, (\vec{r}_1 . \hat{j} - \vec{r}_2 . \hat{j}) \\ &= mg\, (H_1 - H_2) \\ &= -\, m\, g\,\, DH \end{aligned}$$

می‌بینید این کار منفی mg در ΔH اختلاف ارتفاع دو نقطه است.

تعریف نهایی

در این بخش می‌خواهم با کار کامل ریاضی تعریف کامل و سه بعدی "کار" را بدست بیاورم. از این شروع خواهم کرد که تغییرات انرژی جنبشی را می‌خواهم بدست بیاورم.

$$\Delta K = \int d\,K$$

این رابطه می‌گوید که مقدار کل تغییر انرژی جنبشی برابر با مجموع تغییرات ریز $d\,K$ در هر لحظه است.

$$K=\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2}m\vec{V}\cdot\vec{V}$$

$$dK=\frac{1}{2}m\,d(\vec{V}\cdot\vec{V})=\frac{1}{2}m\,(d\vec{V}\cdot\vec{V}+\vec{V}\cdot d\vec{V})$$

$$=m\vec{V}\cdot d\vec{V}=m\,d\vec{V}\cdot\vec{V}$$

$$=m\,\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot\vec{V}\,dt$$

اما $\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{a}$, $\vec{F}=m\vec{a}$, $d\vec{r}=\vec{V}\,dt$ جابجایی کوچک لحظه‌ای

$$\Rightarrow\quad dK=\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow\quad DK=W_{(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

که این تعریف دقیق و کلی کار برای مسیری که از $\vec{r}_1$ شروع و به $\vec{r}_2$ اتمام می‌یابد. ایـن انتگـرال می‌تواند برای مسیرهای مختلف مقادیر متفاوتی بیابد و لزومی ندارد در همهٔ مسیرهای بین دو نقطه یکی شود حتی اگر $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$ تابع صرفاً مکان باشد.

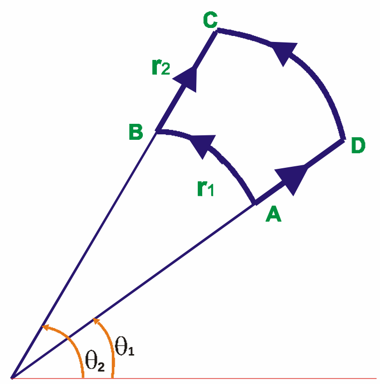
مثال. کار نیروی ثابت چیست؟

حل.

$$W=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\vec{F}\cdot\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}d\vec{r}=\vec{F}\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)=\vec{F}\cdot\vec{d}$$

که همان رابطهٔ قبلی است و جالب است که به مسیر حرکت بستگی ندارد بلکه صرفاً بـه ابتـدا و انتها بستگی دارد.

مثال. نیرویی به فرم $\vec{F} = a\,\frac{r}{\theta}\,\hat{\theta}$ در مختصات قطبی در نظر بگیرید. مطابق شکل کار این نیرو را در جابجایی از (r_1 , θ_1) به (r_2 , θ_2) برای مسیرهای CBA و CDA بدست آورید.



حل.

در مسیر CBA ابتدا شعاع ثابت است که کار در این تکه:

$$W_{AB} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} a\,\frac{r_1}{\theta}\,r_1\,d\theta$$

$ds = r_1\,d\theta$ المان مماس بر نیرو است.

$$W_{AB} = a\,r_1^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\theta} = a\,r_1^2\,\ln\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)$$

$$W_{BC} = 0$$

زیرا المان طول در مسیر عمود بر نیرو است.

$$\Rightarrow\quad W_{ABC} = a\,r_1^2\,\ln\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)$$

در مسیر CDA ابتدا مسیر DA است که عمود بر نیرو است پس:

$$W_{AD} = 0$$

و سپس مسیر CD است که مماس بر نیروست.

$$W_{DC} = \int_{q_1}^{q_2} a \frac{r_2}{q} r_2 \, dq$$

که $ds = r_2 dq$ المان طول مماس بر نیرو است.

$$W_{DC} = a\, r_2^2 \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{q} = a\, r_2^2 \, ln\left(\frac{q_2}{q_1}\right)$$

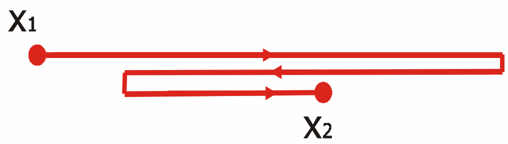
پس

$$W_{ADC} = W_{AD} + W_{DC}$$

$$= a\, r_2^2 \, ln\left(\frac{q_2}{q_1}\right)$$

خوب به طور بدیهی کار W_{ADC} با W_{ABC} برابر نیستند و می‌بینید با آنکه این نیرو را بر حسب ضوابطی مشخص از (r, q) برای همهٔ حرکت‌ها در نظر گرفتیم ولی کار به مسیر بستگی دارد نه صرفاً به نقاط ابتدا و انتها.

در مورد نیروهای تک بعدی اگر $F(x)$ مشخص باشد صرفاً یک مقدار برای انتگرال $W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx$ وجود خواهد داشت که به نقاط اولیه x_1 و نهایی x_2 بستگی خواهد داشت و به شیوهٔ پیمایش x_1 به x_2 بستگی ندارد یعنی اینکه ممکن است مستقیم از x_1 به x_2 رفته باشیم یا با تعداد زیادی رفت و برگشت.



---

[1] *Work*

[2] *Kinetic energy*

[3] *Joule*